

Esercizi di meccanica dei sistemi

7

■ 7.1 Esercizi di Statica dei sistemi

Si ricordino innanzi tutto (si veda il Cap.VI) i seguenti fatti essenziali.

Una configurazione di equilibrio per un sistema è una configurazione (fissa nello spazio di riferimento e) tale che la quiete in \mathcal{C}_e è la (unica) soluzione delle equazioni del moto uscente dalle condizioni iniziali: $(\mathcal{C}_e, 0)$.

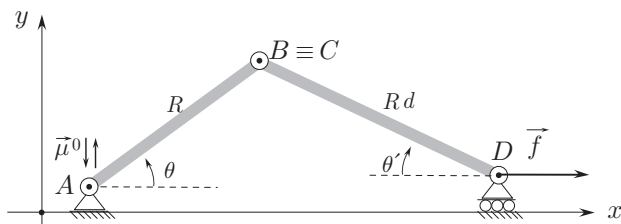
Per determinare una configurazione \mathcal{C}_e di equilibrio per un sistema a vincoli perfetti, generalmente dipendenti dal tempo, si suppone sia possibile usare il Principio dei lavori virtuali, per il quale è necessario che:

- (1) la configurazione \mathcal{C}_e sia compatibile con i vincoli in ogni istante t ;
- (2) il lavoro virtuale della sollecitazione attiva, calcolata in corrispondenza a quella configurazione e per l'atto di moto nullo, sia nullo se la configurazione \mathcal{C}_e è ordinaria, non positivo se di confine, e ciò in corrispondenza a *ogni spostamento virtuale* relativo a quella configurazione e per ogni istante.

Esercizio 7.1.1 Si consideri un sistema costituito da due sbarre rigide rettilinee omogenee AB e CD . La sbarra AB sia vincolata in A da una cerniera cilindrica fissa con asse z . La seconda sia vincolata da una cerniera cilindrica ad asse parallelo a z e passante per $B \equiv C$, nonché da un sistema di guida+cerniera che mantenga il suo altro estremo D scorrevole senza attrito lungo una retta x ortogonale a z . Il sistema prende il nome di manovellismo di spinta.

Si supponga $|AB| < |CD|$ (così i vincoli risultano regolari), e si indichi con $\theta \in (-\pi, \pi]$ l'anomalia che il vettore \overrightarrow{AB} forma con l'asse delle x contata positivamente in verso antiorario rispetto a z .

Sulla manovella AB agisca una coppia motrice di momento $\vec{\mu}^{(0)}$ costante e parallelo all'asse z , e sull'estremo D della biella CD agisca una forza resistente \vec{f} costante e parallela all'asse x . Se ne determinino i valori in modo che il sistema ammetta posizioni di equilibrio.



Risoluzione Il sistema è a vincoli perfetti, bilaterali, fissi. Mediante il principio dei lavori virtuali si ha che sono di equilibrio le configurazioni per le quali $\delta\mathcal{L}^{mot} + \delta\mathcal{L}^{res} = 0$ per ogni spostamento reversibile. Ma è

$$\delta\mathcal{L}^{mot} = \vec{\mu} \cdot \vec{\omega} \delta t = \mu_z \delta\theta, \quad \delta\mathcal{L}^{res} = \vec{f} \cdot \vec{v}_D \delta t = f_x \delta x_D,$$

e quindi per annullare il lavoro virtuale totale occorre determinare la relazione fra x_D e θ , e poter così esprimere (ad esempio) la $\delta x_D = (dx_D(\theta)/d\theta) \delta\theta$ e raccogliere il comune fattore $\delta\theta$ che deve essere arbitrario. D'altra parte, è immediato verificare le seguenti relazioni, con $R := |AB|$, $Rd := |CD|$, e $d > 1$ affinché i vincoli siano regolari,

$$\begin{cases} x_B = R \cos \theta = x_C \\ y_B = R \sin \theta = y_C = Rd \sin \theta' \end{cases} \quad \begin{cases} x_D = x_C + Rd \cos \theta' \\ y_D = 0 \end{cases}$$

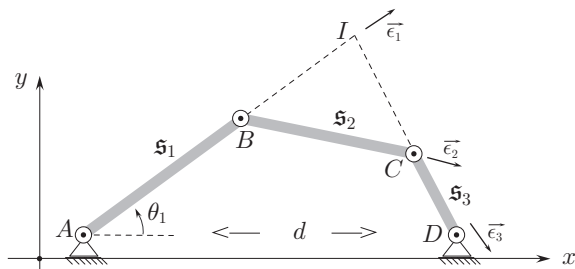
dalle quali seguono (Pitagora) $Rd \cos \theta' = \sqrt{R^2 d^2 - y_C^2}$ che fornisce

$$\frac{x_D}{R} = \cos \theta + \sqrt{d^2 - \sin^2 \theta} \quad \text{e quindi} \quad \frac{\delta x_D}{R} = \left(-\sin \theta - \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{d^2 - \sin^2 \theta}} \right) \delta\theta.$$

Affinché il lavoro virtuale dell'intera sollecitazione attiva $\mathfrak{s}_{e,0}$ sia nullo per ogni spostamento $\delta\theta$ occorre che siano

$$\mu_z = f_x R \left(\sin \theta + \frac{\sin \theta \cos \theta}{\sqrt{d^2 - \sin^2 \theta}} \right). \quad \square$$

Esercizio 7.1.2 Il seguente sistema è a vincoli perfetti; sono infatti cerniere cilindriche lisce ad asse orizzontale. Le sollecitazioni attive sono rispettivamente $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2, \mathfrak{s}_3$. Le sbarre sono rettilinee, rigide, omogenee pesanti, di lunghezze (l_1, l_2, l_3) rispettivamente, e siano $d := |AD|$, $d_1 := |BI|$, $d_3 := |ID|$, con I il punto intersezione delle due rette AB e CD , ed $\vec{\varepsilon}_1 := \text{vers } \overline{AB}$, $\vec{\varepsilon}_2 := \text{vers } \overline{BC}$, $\vec{\varepsilon}_3 := \text{vers } \overline{CD}$, e $\theta_{1,2,3}$ le loro inclinazioni rispetto al vettore \vec{e}_1 .



Determinare le posizioni di equilibrio del sistema mediante il principio dei lavori virtuali.

Risoluzione Una possibilità per trovare due relazioni necessarie fra le variazioni $\delta\theta_1$, $\delta\theta_2$, $\delta\theta_3$ degli angoli di inclinazione delle sbarre è derivare le

$$(7.1.1) \quad \left(\overrightarrow{AD} \right)_e = \begin{pmatrix} d \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell_1 \cos \theta_1 + \ell_2 \cos \theta_2 + \ell_3 \cos \theta_3 \\ \ell_1 \sin \theta_1 + \ell_2 \sin \theta_2 + \ell_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix}$$

e poi risolvere il sistema di due equazioni così trovato. Ponendo $d_1 := |BI|$ e $d_3 := |IC|$ sussistono le:

$$(7.1.2) \quad \begin{cases} \ell_2 \cos \theta_2 = d_1 \cos \theta_1 + d_3 \cos \theta_3 \\ \ell_2 \sin \theta_2 = d_1 \sin \theta_1 + d_3 \sin \theta_3 \end{cases}$$

che moltiplicate per $\dot{\theta}_2$ forniscono

$$\begin{cases} \ell_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 = d_1 \dot{\theta}_2 \cos \theta_1 + d_3 \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 \\ \ell_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 = d_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_1 + d_3 \dot{\theta}_2 \sin \theta_3 \end{cases}$$

e quindi derivando della (7.1.1) si ricava il sistema

$$\begin{cases} (\ell_1 \dot{\theta}_1 + d_1 \dot{\theta}_2) \sin \theta_1 + (\ell_3 \dot{\theta}_3 + d_3 \dot{\theta}_2) \sin \theta_3 = 0 \\ (\ell_1 \dot{\theta}_1 + d_1 \dot{\theta}_2) \cos \theta_1 + (\ell_3 \dot{\theta}_3 + d_3 \dot{\theta}_2) \cos \theta_3 = 0 \end{cases}$$

Questo ha determinante dei coefficienti che vale $\sin(\theta_1 - \theta_3)$; ma quando I esiste è $(\theta_1 - \theta_3) \neq 0$, e dunque occorre: $(\ell_1 \dot{\theta}_1 + d_1 \dot{\theta}_2) = (\ell_3 \dot{\theta}_3 + d_3 \dot{\theta}_2) = 0$. Si badi a non derivare la (7.1.2) senza tenere conto del fatto che i due termini d_1 e d_3 non sono costanti.

Un'altra possibilità, più rapida graficamente, è quella di servirsi delle relazioni fra le velocità (qui sufficienti alla risoluzione del problema)

$$\begin{aligned} \vec{\omega}_1 \times \overrightarrow{AB} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{IB} &\implies \dot{\theta}_1 \ell_1 = -\dot{\theta}_2 d_1 \\ \vec{\omega}_3 \times \overrightarrow{DC} = \vec{\omega}_2 \times \overrightarrow{IC} &\implies \dot{\theta}_3 \ell_3 = -\dot{\theta}_2 d_3 \end{aligned}$$

che coincidono con quelle trovate sopra.

In definitiva si hanno

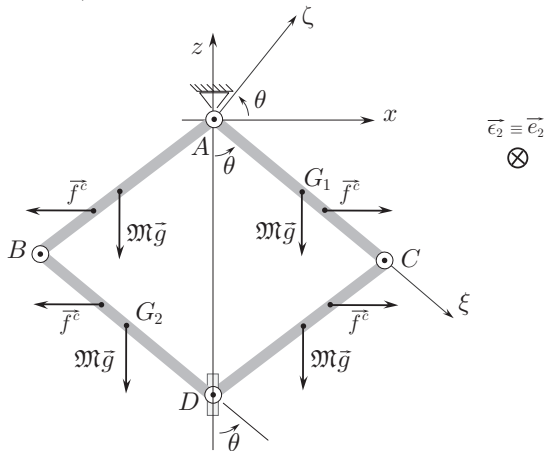
$$\vec{\omega}_2 = -\frac{\ell_1}{IB} \vec{\omega}_1 \quad \text{e} \quad \vec{\omega}_3 = \frac{IC}{\ell_3} \frac{\ell_1}{IB} \vec{\omega}_1,$$

e quindi

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^a &= \delta t \left(\vec{\omega}_1 \cdot \vec{M}_A^{\mathfrak{S}_1} + \vec{\omega}_2 \cdot \vec{M}_I^{\mathfrak{S}_2} + \vec{\omega}_3 \cdot \vec{M}_D^{\mathfrak{S}_3} \right) \\ &= \delta t \left(M_{A,z}^{\mathfrak{S}_1} \dot{\theta}_1 - M_{I,z}^{\mathfrak{S}_2} \frac{\ell_1}{IB} \dot{\theta}_1 + M_{D,z}^{\mathfrak{S}_3} \frac{IC}{\ell_3} \frac{\ell_1}{IB} \dot{\theta}_1 \right). \quad \square \end{aligned}$$

Esercizio 7.1.3 Un sistema è costituito da quattro sbarre uguali, rettilinee rigide omogenee pesanti, vincolate per i loro estremi con cerniere cilindriche lisce in modo da formare un rombo articolato (si veda la figura). L'estremo A è fisso rispetto a terra, l'estremo D può scorrere liberamente lungo la verticale z per A .

Determinare se vi sono posizioni di equilibrio in uno spazio uniformemente rotante intorno a z . (Si badi che l'anomalia θ è contata positiva in senso antiorario rispetto al vettore $-\vec{e}_2$).



Risoluzione Si ricordi che su una sbarretta vincolata nel suo estremo Ω a una cerniera avente asse orizzontale, e rotante con velocità angolare $\vec{\omega}$ di trascinamento costante, agisce, nello spazio rotante, la sollecitazione centrifuga. Chiamato $\vec{e}_2 \equiv \vec{e}_2$ il vettore ortogonale alla sbarretta e alla velocità angolare (di trascinamento), il momento totale della centrifuga rispetto al punto Ω (si veda la (4.3.13)) vale

$$\vec{M}_\Omega^c = - \sum \overline{\Omega P_h} \times (m_h \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overline{\Omega P_h})) = -\vec{\omega} \times \mathcal{H}_\Omega \vec{\omega} ,$$

in cui

$$\mathcal{H}_\Omega \vec{\omega} = A \omega_\xi \vec{e}_1 + B \omega_\eta \vec{e}_2 + C \omega_\zeta \vec{e}_3 = C \omega_\zeta \vec{e}_3 = \frac{\mathfrak{M} \ell^2}{3} \omega \sin \theta \vec{e}_3 ;$$

per cui si ha

$$\begin{aligned} \vec{M}_\Omega^c &= - \omega_z \vec{e}_3 \times \mathfrak{M} \frac{\ell^2}{3} \omega_\zeta \vec{e}_3 = -\omega^2 \sin \theta \mathfrak{M} \frac{\ell^2}{3} \vec{e}_3 \times \vec{e}_3 \\ &= -\mathfrak{M} \frac{\ell^2}{3} \omega^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_2 , \end{aligned}$$

Dunque:

$$\delta \mathcal{L}^c = \vec{M}_\Omega^c \cdot \delta \vec{\omega}^{rel} = -\vec{M}_\Omega^c \cdot \vec{e}_2 \delta \theta = \mathfrak{M} \frac{\ell^2}{3} \omega^2 \cos \theta \sin \theta \delta \theta .$$

D'altra parte (ancora per la sola sbarretta AC) è $\vec{F}^c = \mathfrak{M} \frac{\ell}{2} \omega^2 \sin \theta \text{ vers } \overrightarrow{G^* G}$. Pertanto la centrifuga è equivalente a una sola forza applicata in un punto del suo

asse centrale:

$$\overrightarrow{\Omega P^c} = \frac{-2}{\mathfrak{M} \ell \omega^2 \sin \theta} \vec{e}_1 \times \mathfrak{M} \frac{\ell^2}{3} \omega^2 \cos \theta \sin \theta \vec{e}_2 + \lambda \vec{e}_1 = -\frac{2}{3} \ell \cos \theta \vec{e}_3 + \lambda \vec{e}_1 .$$

Con P^c fisso sulla sbarretta e tale che $\overrightarrow{\Omega P^c} = 2\overrightarrow{AC}/3$ si ha

$$\vec{v}_{P^c} = -\dot{\theta} \vec{e}_2 \times \frac{2}{3} \ell \vec{e}_1 = \frac{2}{3} \ell \dot{\theta} \vec{e}_3 .$$

Se ne ricava anche ora

$$\delta \mathcal{L}_{(1)}^c = \vec{F}^c \cdot \vec{v}_{P^c} \delta t = \mathfrak{M} \omega^2 \overrightarrow{G_1^* G_1'} \cdot \vec{v}_{P^c} \delta t = \mathfrak{M} \omega^2 \frac{\ell}{2} \sin \theta \frac{2}{3} \ell \cos \theta \delta \theta .$$

La simmetria del sistema e il fatto che D scorra ortogonalmente alla \vec{F}^c implica che $\delta \mathcal{L}^c = 4 \delta \mathcal{L}_{(1)}^c$. A sua volta $z_D = -2\ell \cos \theta$ e $\vec{v}_{G_2} = \vec{v}_D + \vec{\omega} \times \overrightarrow{DG_2}$, per cui si hanno le

$$\begin{aligned} W_{AC}^p &= \vec{v}_{G_1} \cdot \mathfrak{M} \vec{g} = \left(-\dot{\theta} \vec{e}_2 \right) \times \frac{\ell}{2} \vec{e}_1 \cdot \mathfrak{M} g \left(\cos \theta \vec{e}_1 - \sin \theta \vec{e}_3 \right) \\ &= -\frac{\ell}{2} \mathfrak{M} g \dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_2 \\ W_{BD}^p &= \vec{v}_D \cdot \mathfrak{M} \vec{g} + \left(-\dot{\theta} \vec{e}_2 \right) \cdot \left(-\frac{\ell}{2} \vec{e}_1 \right) \times \mathfrak{M} \vec{g} = \left(\dot{z}_D \vec{e}_3 - \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \vec{e}_3 \right) \cdot \mathfrak{M} \vec{g} \\ &= \left(2\ell \sin \theta - \frac{\ell}{2} \sin \theta \right) \dot{\theta} \left(-\mathfrak{M} g \right) , \end{aligned}$$

e quindi

$$\delta \mathcal{L}^p = -2 \mathfrak{M} g \frac{\ell}{2} \sin \theta \delta \theta - 2 \mathfrak{M} g \left(2\ell \sin \theta - \frac{\ell}{2} \sin \theta \right) \delta \theta = -4 \mathfrak{M} g \ell \sin \theta \delta \theta .$$

Controllo:

In questo caso sarebbe stato più veloce servirsi delle coordinate piuttosto che degli atti di moto; si hanno

$$\begin{aligned} z_{P^c} &= -\frac{2}{3} \ell \cos \theta & \implies & x_{P^c} = \frac{2}{3} \ell \sin \theta \\ z_{G_1} &= -\frac{1}{2} \ell \cos \theta & \implies & x_{G_1} = \frac{1}{2} \ell \sin \theta \\ z_{G_2} &= -\frac{3}{2} \ell \cos \theta & \implies & \delta z_{G_2} = \frac{3}{2} \ell \sin \theta \delta \theta \end{aligned}$$

per cui

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}^p &= -2 \mathfrak{M} g \left(\delta z_{G_1} + \delta z_{G_2} \right) = 2 \mathfrak{M} g \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} \right) \sin \theta \delta \theta \\ \delta \mathcal{L}^{app} &= 4 \mathfrak{M} \omega^2 x_{G_1} \delta x_{P^c} = 4 \mathfrak{M} \omega^2 \frac{1}{3} \sin \theta \cos \theta \delta \theta . \end{aligned}$$

Inoltre, qui si possono verificare i calcoli fatti e sfruttare il fatto che la sollecitazione attiva è “a potenziale”; e siccome $v_\Omega = \partial \overline{\Omega \vec{P}} / \partial t = 0$ e $\vec{v}_i = \vec{v}_i$ per ogni punto P_i del sistema, si conclude che $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{Q}^d = 0$. Dunque: $\delta \mathcal{L}^{att} = -(\delta \mathcal{V}^p + \delta \mathcal{V}^c)$ con

$$\mathcal{V}^p = 2\mathfrak{M}g(z_{G_1} + z_{G_2}) = -2\mathfrak{M}g \left(\frac{\ell}{2} \cos \theta + \frac{3\ell}{2} \cos \theta \right) = -4\mathfrak{M}g \ell \cos \theta$$

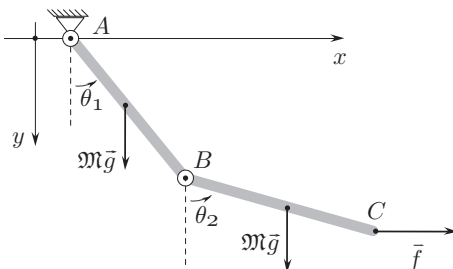
$$-\frac{1}{4} \mathcal{V}^c = \frac{1}{2} J_z \omega^2 \quad \text{con} \quad J_z = \vec{e}_3 \cdot \mathcal{H}_\Omega \vec{e}_3 = \mathfrak{M} \frac{\ell^2}{3} \sin^2 \theta.$$

In definitiva si trova

$$-\delta \mathcal{V}^{att} = \delta \mathcal{L}^{att} = 4\mathfrak{M} \ell \left(-g \sin \theta + \omega^2 \frac{\ell}{3} \sin \theta \cos \theta \right) \delta \theta.$$

Le posizioni di equilibrio sono le due banali: $\theta = 0, \pi$; inoltre se esiste, ovvero se la ω di trascinamento è abbastanza grande, c'è la posizione intermedia: $\arccos(3g/\ell\omega^2)$. \square

Esercizio 7.1.4 Il seguente sistema è a vincoli perfetti; sono infatti cerniere cilindriche lisce ad asse orizzontale. Le sollecitazioni attive sono i pesi e la $(\overrightarrow{OC}, f \vec{e}_1)$. Le sbarre sono uguali, rettilinee, rigide, omogenee.



Determinare le posizioni di equilibrio del sistema mediante il principio dei lavori virtuali.

Risoluzione La

$$-\Pi = \mathfrak{M}g \frac{\ell}{2} \cos \theta_1 + \mathfrak{M}g \left(\ell \cos \theta_1 + \frac{\ell}{2} \cos \theta_2 \right) + f (\ell \sin \theta_1 + \ell \sin \theta_2)$$

implica

$$\delta \mathcal{L} = \left(-\frac{3}{2} \mathfrak{M}g \ell \sin \theta_1 + f \ell \cos \theta_1 \right) \delta \theta_1 + \left(-\frac{1}{2} \mathfrak{M}g \ell \sin \theta_2 + f \ell \cos \theta_2 \right) \delta \theta_2$$

e sfruttando l'indipendenza reciproca fra le due variabili lagrangiane θ_1, θ_2 se ne conclude che $\tan \theta_1 = 2f/3\mathfrak{M}g$ e $\tan \theta_2 = 2f/\mathfrak{M}g$. \square

Come già riconosciuto nel Cap.III, detta P^* la proiezione di P sull'asse che passa per Ω ed è parallelo al vettore $\vec{\omega}$, il potenziale $\tilde{\Pi}(\mathbf{q}, t)$ può essere espresso mediante la:

$$\Pi(\mathbf{q}, t) = -m\omega^2 |\overrightarrow{P^*P}|^2/2, \quad \text{ed è} \quad \partial_{q_h} \tilde{\Pi} \equiv m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \overrightarrow{\Omega P}) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega P}}{\partial q_h}.$$

Inoltre, l'iniziale ipotesi che sia $\partial \overrightarrow{\Omega P} / \partial t = 0$ fa sì che $\tilde{\Pi}$ coincida con il solo termine centrifugo, che tuttavia non è l'unico responsabile della \mathbf{Q}^r se $\vec{\omega}(t) \neq 0$. \square

Esempio F.3.10 Siano $RC = (O, x, y, z)$ ed $R\Gamma = (\Omega, \xi, \eta, \zeta)$ due spazi di riferimento con basi di versori $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ed $\mathcal{E} = (\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2, \vec{\varepsilon}_3)$ rispettivamente, in moto l'uno rispetto all'altro; si chiamino spazi "assoluto" e "relativo". Il moto di $R\Gamma$ in RC sia noto, e quindi sono esplicitamente note le funzioni del tempo $\vec{v}_\Omega = \vec{v}_\Omega(t)$ e $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$. Un sistema olo-nomo sia costituito da N elementi materiali le cui posizioni assolute e relative, indicate con $\left\{ \left(\overrightarrow{OP}_i \right)_e \equiv \mathbf{x}_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3})^T \right\}_{i=1, \dots, N}$ e $\left\{ \left(\overrightarrow{\Omega P}_i \right)_\varepsilon \equiv \boldsymbol{\xi}_i = (\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \xi_{i,3})^T \right\}_{i=1, \dots, N}$ rispettivamente in RC e in $R\Gamma$, verificano quanto si è visto nel Cap.III.

Dette $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_n)$ le coordinate lagrangiane del sistema, non necessariamente coincidenti con le $(\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \xi_{i,3})$, si hanno le $\overrightarrow{OP}_i(\mathbf{q}, t) = \overrightarrow{O\Omega}(t) + \overrightarrow{\Omega P}_i(\mathbf{q}, t)$ con $\left(\overrightarrow{O\Omega} \right)_e = (x_\Omega(t), y_\Omega(t), z_\Omega(t))^T$ e con i vettori $\overrightarrow{\Omega P}_i$ tali che

$$\overrightarrow{\Omega P}_i(\mathbf{q}, t) = \sum_{m=1}^3 \xi_{i,m}(\mathbf{q}, t) \vec{\varepsilon}_m(t) \quad \text{o anche} \quad \left(\overrightarrow{\Omega P}_i \right)_e = \mathbf{p}(t) \boldsymbol{\xi}_i(\mathbf{q}, t),$$

anche se non è più detto che siano $\partial \overrightarrow{\Omega P}_i / \partial q_h = \vec{\varepsilon}_h$.

Si osservi che in questo esempio lo spazio $R\Gamma$ in RC non è considerato "vincolo" e il suo moto è supposto noto. Le coordinate lagrangiane e i vincoli sono assegnati nello spazio $R\Gamma$: il come e il perché esso si muova non fa parte dei vincoli, ma è "esterno".

Se nello spazio $R\Gamma$ i vincoli non dipendono dal tempo anche le coordinate $\boldsymbol{\xi}_i$ non ne dipendono, e si hanno: $\vec{v}_i^{rel} = \vec{v}_i \equiv \vec{v}_i^{rel}$ e $\partial \overrightarrow{\Omega P}_i / \partial t = 0$.

Sussistono invece in generale le

$$(F.3.14) \quad \vec{v}_i^{ass} = \vec{v}_i^{rel} + \vec{v}_i^\tau = \vec{v}^{rel}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \vec{v}_\Omega(t) + \vec{\omega}(t) \times \overrightarrow{\Omega P}_i(\mathbf{q}, t)$$

con (si ricordi che $\vec{v}_\Omega \equiv \vec{v}_\Omega^\tau$)

$$(F.3.15) \quad \begin{aligned} \vec{v}_i^{rel} &= \frac{\partial \overrightarrow{\Omega P}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial \overrightarrow{\Omega P}_i}{\partial t} = \vec{v}_i^{rel} + \frac{\partial \overrightarrow{\Omega P}_i}{\partial t} \\ &= \sum_{m=1}^3 \dot{\xi}_{i,m} \vec{\varepsilon}_m = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \xi_{i,m}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} \vec{\varepsilon}_m + \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \xi_{i,m}}{\partial t} \vec{\varepsilon}_m. \end{aligned}$$

Si ponga (con un leggero abuso di notazione nella (F.3.17))

$$(F.3.16) \quad \mathcal{T}^{ass} - \mathcal{T}^{rel} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{ass} \cdot \vec{v}_i^{ass} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{rel} \cdot \vec{v}_i^{rel} =: -\tilde{\mathcal{V}}$$

$$(F.3.17) \quad \text{in cui} \quad -\tilde{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \vec{v}_i^{rel} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \vec{v}_i^\tau =: \mathcal{T}^d + \mathcal{T}^\tau,$$

e quindi per le ipotesi fatte solo la \mathcal{T}^d dipende dalle $\dot{\mathbf{q}}$.

Sotto le ipotesi dette sussistono in particolare i seguenti fatti

- (1) $\vec{v}_i^\tau = \vec{v}_\Omega + \vec{\omega} \times \vec{\Omega\dot{P}}_i$ non dipende dalle $\dot{\mathbf{q}}$;
- (2) \vec{v}_Ω e $\vec{\omega}$ dipendono solo dal tempo; e quindi: $\frac{\partial \vec{v}_i^\tau}{\partial \mathbf{q}} = \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}}$;
- (3) $\frac{d}{dt} \vec{v}_i^\tau = \vec{a}_i^\tau + \vec{\omega} \times \vec{v}_i^{rel}$;
- (4) $\frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \xi_{i,m}}{\partial \mathbf{q}} \vec{\varepsilon}_m \equiv \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}}$, e quindi
 $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \dot{\xi}_{i,m}}{\partial \mathbf{q}} \vec{\varepsilon}_m + \sum_{m=1}^3 \xi_{i,m} \vec{\omega} \times \vec{\varepsilon}_m$;
- (5) $\sum_{m=1}^3 \frac{\partial \dot{\xi}_{i,m}}{\partial \mathbf{q}} \vec{\varepsilon}_m = \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\sum_{m=1}^3 \dot{\xi}_{i,m} \vec{\varepsilon}_m \right) = \frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \mathbf{q}}$;
- (6) $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \mathbf{q}} = \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}}$.

Pertanto si calcolano

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}^d}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \frac{d}{dt} \left(- \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \\
 \text{(F.3.18)} \quad &= - \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{a}_i^\tau + \vec{\omega} \times \vec{v}_i^{rel} \right) \cdot \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)
 \end{aligned}$$

insieme con

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \mathbf{q}} &= - \frac{\partial \mathcal{T}^d}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial \mathcal{T}^\tau}{\partial \mathbf{q}} \\
 \text{(F.3.19)} \quad &= - \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}} \cdot \vec{v}_i^{rel} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \frac{\partial \vec{v}_i^{rel}}{\partial \mathbf{q}} \right) - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}}
 \end{aligned}$$

e quindi la funzione $\tilde{\mathcal{V}}$ definita dalla (F.3.17) è tale che

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \tilde{\mathcal{V}}}{\partial \mathbf{q}} &= - \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{a}_i^\tau + \vec{\omega} \times \vec{v}_i^{rel} \right) \cdot \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}} \cdot \vec{v}_i^{rel} \\
 \text{(F.3.20)} \quad &= - \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{a}_i^\tau + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_i^{rel} \right) \cdot \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q}^{app},
 \end{aligned}$$

ovvero: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}^d}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{T}^d}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{T}^\tau}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{Q}^{app}$, sebbene in generale *non sia* $\mathbf{Q}^\tau = - \frac{\partial \mathcal{T}^\tau}{\partial \mathbf{q}}$.

Ciò mostra che se lo spazio fin qui considerato “assoluto” è uno spazio inerziale *la sollecitazione apparente (trascinamento e deviazione) è una sollecitazione a potenziale*, e il suo potenziale (sotto le ipotesi dette e a meno di un eventuale addendo che non influisca sulle equazioni di moto, per esempio una combinazione lineare a coefficienti costanti delle $\dot{\mathbf{q}}$), è dato dalla (F.3.17), e cioè da

$$\text{(F.3.21)} \quad \tilde{\mathcal{V}} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \frac{\partial \vec{\Omega\dot{P}}_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \vec{v}_i^\tau .$$

Risulta dunque: $\tilde{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{q}} + \tilde{\Pi}$ con il potenziale vettore $\boldsymbol{\pi}$ e il potenziale scalare $\tilde{\Pi}$ della sollecitazione apparente rispettivamente dati da

$$(F.3.22) \quad \boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{q}} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \vec{v}_i^{rel},$$

$$(F.3.23) \quad \tilde{\Pi} = - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \vec{v}_i^{\tau}$$

mentre i due addendi \mathcal{T}^d e \mathcal{T}^{τ} della stessa sollecitazione (dato che $\vec{v}_i^{\tau} = \vec{v}_{\Omega} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i$ e $\vec{v}_i^{rel} = \vec{v}_i^{rel} + \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t}$) sono

$$\mathcal{T}^{\tau} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \vec{v}_i^{\tau} = \frac{1}{2} \left(\mathfrak{M} v_{\Omega}^2 + \vec{\omega} \cdot \mathcal{H}_{\Omega} \vec{\omega} + 2\mathfrak{M} \vec{v}_{\Omega} \cdot \vec{\omega} \times \overrightarrow{\Omega \dot{G}} \right),$$

$$\mathcal{T}^d = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \vec{v}_i^{rel} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \left(\vec{v}_i^{rel} + \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t} \right) = -\boldsymbol{\pi} \dot{\mathbf{q}} + \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^{\tau} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t}.$$

Tramite le (F.3.21) e le (F.3.17) si esplicitano le componenti lagrangiane della sollecitazione apparente

$$(F.3.24) \quad \begin{aligned} Q_h^{app} &= - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}^d}{\partial \dot{q}_h} + \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\mathcal{T}^d + \mathcal{T}^{\tau} \right) \\ &= \frac{d\pi_h}{dt} - \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\pi_k \dot{q}_k + \tilde{\Pi} \right) = \boxed{\frac{\partial \pi_h}{\partial t} + \Gamma_{hk} \dot{q}_k - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial q_h}} \end{aligned}$$

ma si osservi che *queste non implicano che le due sollecitazioni: di deviazione e di trascinamento siano separatamente a potenziale rispetto ai due termini \mathcal{T}^d e \mathcal{T}^{τ} : si veda la (F.3.29), e ciò neanche nel caso particolare $\vec{v}_{\Omega} = \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t} = 0$.*

Usando poi le $\pi_h = - \sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{v}_{\Omega} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i \right) \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h}$, si riconosce che la Γ_{hk} è:

$$(F.3.25) \quad \boxed{\Gamma_{hk} = \frac{\partial \pi_h}{\partial q_k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial q_h} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_k}}$$

e questo, d'altra parte, si può provare anche mediante il calcolo diretto:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \pi_h}{\partial q_k} - \frac{\partial \pi_k}{\partial q_h} &= - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_{\Omega} \cdot \left(\frac{\partial^2 \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_k \partial q_h} - \frac{\partial^2 \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h \partial q_k} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} \cdot \left(\vec{\omega} \times \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_k} \right) + \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_k} \cdot \left(\vec{\omega} \times \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_k} \times \vec{\omega} - \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_k} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} \times \vec{\omega}. \end{aligned}$$

È bene rimarcare che solo l'ulteriore ipotesi $\partial \overrightarrow{\Omega \dot{P}}_i / \partial t = 0$ permette di semplificare le espressioni di \vec{v}_i^{rel} e di $\tilde{\Pi}$, e che è necessaria anche la $\vec{v}_{\Omega} = 0$ per ottenere il termine

“centrifugo”, in generale solo parte della componente lagrangiana Q^τ (si veda anche la (??) nel N.B. ??):

$$(F.3.26) \quad -\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \mathbf{q}} = \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\tau \cdot \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}_i^\tau}{\partial \mathbf{q}} \equiv \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \left(\frac{1}{2} \tilde{\omega} \cdot \mathcal{H}_\Omega \tilde{\omega} \right) =: -\frac{\partial \mathcal{V}^c}{\partial \mathbf{q}}.$$

L'ipotesi che i vincoli nello spazio $R\Gamma$ siano indipendenti dal tempo: $\partial \overrightarrow{\Omega P}_i / \partial t = 0$ riduce anche il prodotto $\mathcal{T}^d \equiv \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\tau \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^{rel}$ al solo $-\pi \dot{\mathbf{q}} = \sum_i m_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\tau \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^{rel}$. In particolare, se tutte le $\tilde{\mathbf{v}}_i^{rel}$ sono comunque ortogonali alle $\tilde{\mathbf{v}}_i^\tau$ si ha $\mathcal{T}^d = 0$ insieme con $\mathbf{Q}^d = 0$; e rimane $-\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{T}^\tau$. Se poi anche $\tilde{\mathbf{v}}_\Omega = 0$, nel potenziale $\tilde{\mathcal{V}}$ rimane il solo \mathcal{V}^c .

Ciò è quanto avviene, ad esempio, se il moto di trascinamento è rotatorio (con Ω sull'asse) e il moto relativo avviene su un piano (fisso in $R\Gamma$) del fascio di asse l'asse di rotazione; in tal caso la velocità angolare di trascinamento $\tilde{\omega}^\tau$ è complanare con tutte le velocità virtuali $\tilde{\mathbf{v}}_{i,h}^{rel}$, e le forze di deviazione sono tutte ortogonali al piano detto e quindi ai vettori $\partial \overrightarrow{\Omega P}_i / \partial q_h$ tangenti le linee coordinate; inoltre (si veda più avanti) la \mathbf{Q}^{app} è solo quella contenente il termine centrifugo giacché si annullano tutti gli addendi della Γ_{hk} nella (F.3.25).

Se $\tilde{\mathbf{v}}_i^\tau \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^{rel} \neq 0$, seppure siano ancora $\partial \overrightarrow{\Omega P}_i / \partial t = 0$ e le $\tilde{\mathbf{f}}_i^d$ ancora giroscopiche, la sollecitazione apparente ha il suo potenziale

$$-\tilde{\mathcal{V}} = \mathcal{T}^d + \mathcal{T}^\tau = \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\tau \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^{rel} + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{v}}_i^\tau \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^\tau$$

che, con l'ulteriore ipotesi $\tilde{\mathbf{v}}_\Omega = 0$, diventa il più semplice

$$(F.3.27) \quad -\tilde{\mathcal{V}} = \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\omega}^\tau \times \overrightarrow{\Omega P}_i \cdot \tilde{\mathbf{v}}_i^{rel} + \frac{1}{2} \tilde{\omega}^\tau \cdot \mathcal{H}_\Omega \tilde{\omega}^\tau.$$

N.B. Si noti che i termini giroscopici $Q_h = \Gamma_{hk} \dot{q}_k$, pur avendo potenza virtuale $\mathbf{Q} \dot{\mathbf{q}}$ nulla (e anche relativa se $\partial \overrightarrow{\Omega P}_i / \partial t = 0$), possono comparire nelle equazioni di Lagrange in quanto essi non vengono eliminati insieme alle forze dei vincoli perfetti giacché possono avere componenti non nulle lungo tutti i vettori $(\boldsymbol{\nu}_1, \dots, \boldsymbol{\nu}_n)$ tangenti alle linee coordinate delle variabili lagrangiane. Infatti, le forze ortogonali a tutti tali vettori contengono quelle che hanno potenza virtuale nulla per ogni velocità virtuale, ma non il viceversa: non è detto che forze, che pure hanno potenza virtuale nulla, lo rimangano per qualsiasi altra velocità virtuale. In particolare non è detto che debbano essere singolarmente ortogonali a qualcuno degli $\boldsymbol{\nu}_h$. Quando i vincoli non dipendono dal tempo, per esempio, le forze di deviazione sono giroscopiche ma non è detto che siano separatamente ortogonali alle linee coordinate: in breve, la $\mathbf{q} \Gamma \dot{\mathbf{q}} = 0$ non implica $\mathbf{Q}^d = \Gamma \dot{\mathbf{q}} = 0$. È chiaro invece che le \mathbf{Q}^d sono tutte nulle quando $\Gamma = 0$ (e i vincoli sono fissi). In conclusione non è detto che le $\tilde{\mathbf{f}}_i^d$ vengano eliminate insieme alle forze vincolari $\tilde{\mathbf{f}}_i^v$. (Contrariamente al caso strettamente conservativo nel quale $\mathcal{W} \delta t = -\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} = -\delta \mathcal{V}$, la $\tilde{\mathcal{V}}$ è legata alla potenza virtuale delle $\tilde{\mathbf{Q}}$ solo per il tramite della $\tilde{\mathbf{Q}} \dot{\mathbf{q}}$.)

Esempio

Si consideri un (solo) elemento con: $\partial \overrightarrow{\Omega P} / \partial q_1 = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1$, $\partial \overrightarrow{\Omega P} / \partial q_2 = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$, e che quindi si muove sul piano $(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2)$, e si cerchi una forza che sia ortogonale a ciascuna delle $\tilde{\mathbf{v}} = \dot{\xi} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \dot{\eta} \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_2$, ma non necessariamente a tutte simultaneamente, e cioè al piano

$(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$. Deve essere:

$$\vec{f} \cdot \vec{\varepsilon}_1 = 0 \quad \text{se} \quad \dot{\eta} = 0, \quad \text{e cioè quando } \xi \text{ è qualsiasi e } \eta = \text{cost.},$$

$$\vec{f} \cdot \vec{\varepsilon}_2 = 0 \quad \text{se} \quad \dot{\xi} = 0, \quad \text{e cioè quando } \eta \text{ è qualsiasi e } \xi = \text{cost.}$$

Queste condizioni sono verificate da una forza del tipo: $\vec{f} = c_1 \dot{\eta} \vec{\varepsilon}_1 + c_2 \dot{\xi} \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3$, e questa è addirittura giroscopica se $c_1 = -c_2 =: -c$; infatti per essa: $Q_{(1)} = -c\dot{\eta}$, $Q_{(2)} = c\dot{\xi}$, e risulta

$$\vec{f} \cdot \vec{v} = c(-\dot{\eta} \vec{\varepsilon}_1 + \dot{\xi} \vec{\varepsilon}_2 + \vec{\varepsilon}_3) \cdot (\dot{\xi} \vec{\varepsilon}_1 + \dot{\eta} \vec{\varepsilon}_2) = 0 = Q_{(1)}\dot{\xi} + Q_{(2)}\dot{\eta} = \mathbf{q}\Gamma\mathbf{q},$$

pur non essendo la \vec{f} ortogonale al piano $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$. Con questa stessa notazione e $\vec{\omega} = \omega \vec{\varepsilon}_3$ si hanno $\pi_1 = -m\vec{\omega} \times \vec{\Omega} \vec{P}_i \cdot \vec{\varepsilon}_1 = -m\omega\eta$ con $\pi_2 = m\omega\xi$, e dunque $\Gamma_{12} = -2m\omega$, che conferma le $Q_{(1)} = -2m\omega\dot{\eta}$, $Q_{(2)} = 2m\omega\dot{\xi}$. Ciò è quanto avviene alla \vec{f}^d quando $\vec{\omega}$ è ortogonale (basta non parallelo) al piano del moto.

Sono invece ortogonali a entrambi i vettori $\vec{\varepsilon}_1$ ed $\vec{\varepsilon}_2$ le forze di deviazione quando la $\vec{\omega}$ è parallela al piano rotante sul quale si muove il sistema, poiché allora è $\Gamma = 0$. \square

In conclusione, termini giroscopici, e anche nel caso semplice: $\vec{v}_\Omega = \partial \vec{\Omega} \vec{P}_i / \partial t = 0$, possono ammettere il termine \mathcal{T}^d non nullo, e questo, pur se ridotto al termine $\pi \dot{\mathbf{q}} = -\sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \times \vec{\Omega} \vec{P}_i \cdot \vec{v}_i^{rel}$, tuttavia va comunque inserito nella $\mathcal{L} = \mathcal{T} - \tilde{\mathcal{V}}$ per ricavare le corrette equazioni. Tale termine scompare qualora siano $\vec{v}_i^\tau \cdot \vec{v}_i^{rel} = 0$. \diamond

Come controllo, ancora con $\vec{v}_\Omega = \partial \vec{\Omega} \vec{P}_i / \partial t = 0$ si scrivano le equazioni di Lagrange nella forma: $\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial \mathcal{T}}{\partial \mathbf{q}} = Q^{eff} + Q^{app}$ con la Q^{app} calcolata mediante la sua definizione:

$$(F.3.28) \quad Q_h^{app} = -\sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{a}_\Omega^\tau + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\Omega} \vec{P}_i + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\Omega} \vec{P}_i) + 2\vec{\omega} \times \vec{v}_i^{rel} \right) \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_h}.$$

Osservando che la $\partial \pi_h / \partial t$ è la derivata (totale) rispetto al tempo di tutti i termini di $\pi_h = -\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \partial \vec{\Omega} \vec{P}_i / \partial \mathbf{q}$ (si veda la (F.3.22)) che non dipendono dalle variabili lagrangiane \mathbf{q} , per la (F.3.26) si hanno (con $\vec{\omega} \equiv \vec{\omega}^\tau$)

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^N m_i \left(\vec{a}_\Omega^\tau + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{\Omega} \vec{P}_i + \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial t} \right) \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_h} - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \frac{\partial}{\partial q_h} \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial t} = \frac{\partial \pi_h}{\partial t} \\ & -\sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\Omega} \vec{P}_i) \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_h} = -\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i (\vec{\omega} \times \vec{\Omega} \vec{P}_i) \times \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_h} = -\frac{\partial \mathcal{V}^c}{\partial q_h} \\ & -2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \times \vec{v}_i^{rel} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_h} = -2\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \left(\frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial t} \right) \times \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_h} \\ & = \Gamma_{hk} \dot{q}_k - 2\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial q_h} \end{aligned}$$

e dunque si riconosce che la (F.3.28) verifica la (F.3.24) nella quale

$$\frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial q_h} = \frac{\partial \mathcal{V}^c}{\partial q_h} - \frac{\partial}{\partial q_h} \left(\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \frac{\partial \vec{\Omega} \vec{P}_i}{\partial t} \right).$$

Si osservi che, nel caso generale e cioè se $\frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t} \neq 0$ e $\vec{v}_\Omega \neq 0$, le forze di deviazione (a potenza relativa nulla) non hanno necessariamente carattere giroscopico (che annulla la potenza virtuale); il potenziale $-\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i^\tau \cdot \vec{v}_i^{rel}$ è generalmente non nullo, e ancora con $\Gamma_{hk} = 2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} \times \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_k}$ risultano

$$(F.3.29) \quad Q_h^d = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i^d \cdot \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{hk} \dot{q}_k - 2\vec{\omega} \cdot \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t} \times \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h},$$

$$(F.3.30) \quad Q_h^\tau = \sum_{i=1}^N \vec{f}_i^\tau \cdot \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h} = \frac{\partial \pi_h}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial q_h} + 2 \sum_{i=1}^N m_i \vec{\omega} \times \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{\Omega \dot{P}}_i}{\partial q_h}.$$

In particolare, la (F.3.29) mostra che le due sollecitazioni: quella di deviazione e di quella di trascinalimento, la cui somma è una sollecitazione “a potenziale”, non hanno necessariamente questa proprietà se considerate separatamente l’una dall’altra.

Infine, è anche bene rimarcare che sia le (F.3.22), (F.3.23), (F.3.25), sia la (F.3.27), sono relazioni che contengono solo somme di prodotti scalari in \mathbb{R}^3 ; quindi, poiché si è assunto che la base \mathcal{E} non dipende da $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$, e sempre che entrambe le basi siano ortonormali, in tali relazioni i vettori possono equivalentemente essere espressi sia mediante le loro componenti in base \mathcal{e} sia quelle in base \mathcal{E} . \square

•• **Appendice F.3.4.** Prosegue: ?? ••

N.B. F.3.11 Le seguenti considerazioni generalizzano i sistemi lagrangiani.

Si ricordi, innanzi tutto che una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *Connessa* su un aperto convesso $A \subseteq \mathbb{R}^n$ quando per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$ e $\alpha \in [0, 1]$ accade che

$$f(\mathbf{x} + \alpha(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \leq f(\mathbf{x}) + \alpha (f(\mathbf{y}) - f(\mathbf{x})).$$

Se f è di classe C^2 sull’insieme A , sviluppando con Taylor in $\alpha = 1$ ne segue che $f(\mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ e quindi la forma $\frac{1}{2}(\mathbf{y} - \mathbf{x})^T f''(\mathbf{x})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ è definita positiva.

Sia \mathbb{M} la varietà delle fasi del sistema, e si denoti con $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ il punto che, nelle prescelte coordinate, rappresenta in \mathbb{R}^{2n} il punto $(q, \dot{q}) \in \mathbb{M}$. Sia poi $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ la rappresentazione di una funzione definita sullo spazio delle fasi ampliato $\mathbb{R} \times \mathbb{M}$ e ivi di classe C^2 .

Sistema lagrangiano generalizzato := un sistema per il quale

- ciascuna delle funzioni $\dot{\mathbf{q}} \mapsto \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ è convessa su \mathbb{R}^n , e quindi la \mathcal{L} ha Hessiano

$$\text{Det} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \right) \neq 0,$$

- le equazioni del moto del sistema sono quelle che si trovano richiedendo che i moti naturali rendano minimo l’integrale d’azione $\int_{t_0}^t \mathcal{L}(\tau, \mathbf{q}(\tau), \dot{\mathbf{q}}(\tau)) d\tau$ a estremi fissati (si veda il § VI.2).

In tal caso, la \mathcal{L} si dice Lagrangiana del sistema e le equazioni del moto risultano le equazioni di Lagrange (si veda la (??) e il § VI.2):

$$(F.3.31) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_h} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_h} = 0 \quad h = 1, \dots, n.$$