A N A L I S I / 1 Dicembre 2003	cognome e nome	matricola

E1. Siano date le funzioni

$$f(x) = \frac{x}{x+1} + \arctan x \qquad f_1(x) = 8x^3 + 9x^2 + 10x + 1 \qquad f_2(x) = 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 \ .$$

1.1* Studiare campo di esistenza, limiti alla frontiera ed evenutali asintoti della funzione f.

1.2 Studiare continuità e monotonia della funzione f. Verificare che f_1 si annulla in un unico punto $x_0 \in (-1, 0)$ e che $f_2(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Verificare che il polinomio $P(x) = 2x^4 + 3x^3 + 5x^2 + x + 1$ è non negativo in $[-1, 0]$ e quindi su tutto $\mathbb{R}$. Infine, tenendo conto dei precedenti risultati, studiare concavità e convessità di f. Tracciare il grafico di f.

E2. Sia dato

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n^2+2}{n} \right)^{5-2\alpha} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\alpha/2} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \ .$$

2.1* Determinare il limite proposto nel caso in cui $\alpha = 2$.

2.2 Determinare il limite proposto al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$.

E3*. Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{2+x^2} \ .$$

E4. Stabilire se la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x^2)}{(x^2+y^2)^{4/5}} & \text{se } (x,y) \neq 0 \ , \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \ , \end{cases}$$

è continua nell'origine.

D1.

1.1* Enunciare la condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.

1.2 Dimostrare il precedente teorema e fornire un esempio che illustri come tale condizione non sia sufficiente per la convergenza di una serie.

D2.

2.1* Enunciare il Teorema di Weierstrass.

2.2 Fornire un esempio di una funzione definita su un intervallo chiuso e limitato che non sia limitata e un esempio di una funzione continua definita su un intervallo limitato che non sia limitata.

Tempo: 3 ore . Per superare l'esame è necessario svolgere almeno gli esercizi e le domande contrassegnate da asterisco.