1 DICEMBRE 2003

Esercizio 1.

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale tranne il punto $x=-1$, pertanto $C.E. = I\!R \setminus \{-1\}$. Inoltre,

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1 \pm \frac{\pi}{2} \qquad y = 1 \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{sono asinototi orizzontali rispettivamente per } x \to \pm\infty \ ,$$
$$\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x) = \mp\infty \qquad x = -1 \quad \text{è asinototo verticale .}$$

- La funzione proposta è continua nel suo insieme di definizione in quanto è somma di funzioni continue. Monotonia:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{1+x^2} > 0 \qquad \forall x \in C.E.$$

pertanto, f cresce in tutto l'insieme di definizione.
Passiamo ora allo studio di f_1 e f_2. Poiché $f_1'(x) = 24x^2 + 18x + 10 \geq 0$ su tutto $I\!R$, la funzione è strettamente monotona e quindi, essendo $\lim_{x\to\pm\infty} f_1(x) = \pm\infty$, essa attraversa l'asse x in un unico punto x_0. Poiché $f_1(-1) = -8 < 0$ e $f_1(0) = 1 > 0$, si ottiene che $x_0 \in (-1, 0)$.
Poiché $f_2(x) = x^2(2x^2+3x+5)$ ed il discriminante del trinomio di secondo grado $2x^2+3x+5$ è negativo, si ottiene subito che $f_2(x) \geq 0$ per ogni $x \in I\!R$. Infine, poiché $x+1 \geq 0$ per $x \in [-1, 0]$, sommando le due funzioni non negative $f_2(x)$ e $p(x) = x+1$, si ottiene che il polinomio $P(x) = 2x^4+3x^3+5x^2+x+1$ è non negativo in $[-1, 0]$. D'altra parte, $P'(x) = f_1(x)$ che, per quanto detto, si annulla solo in un punto $x_0 \in (-1, 0)$. Tale punto risulta essere l'unico punto di minimo assoluto per $P(x)$ e, poiché $P(x) \geq 0$ in $[-1, 0]$, si ha $P(x_0) \geq 0$, cioè $P(x) \geq 0$ in tutto $I\!R$.
Torniamo ora allo studio della concavità di f:

$$f''(x) = -\frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2x}{(1+x^2)^2} = -2\frac{2x^4+3x^3+5x^2+x+1}{(x+1)^3(1+x^2)^2} = -2\frac{P(x)}{(x+1)^3(1+x^2)^2} \ .$$

Tenendo presente che $P(x) \geq 0$ in tutto $I\!R$, il segno di f'' dipende solo dal fattore $(x+1)^3$, pertanto f è sempre concava per $x > -1$ e convessa per $x < -1$.
Il grafico è

Esercizio 2.

- Per $\alpha = 2$ abbiamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2}{n} \sin\frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n}\frac{1}{n} = 1 \ .$$

- Per $\alpha \in I\!R$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2+2}{n}\right)^{5-2\alpha} \left(\sin\frac{1}{n}\right)^{\alpha/2} &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^2}{n}\right)^{5-2\alpha} \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha/2} \\ &= \lim_{n\to+\infty} n^{5-2\alpha-\alpha/2} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2; \\ 1 & \text{se } \alpha = 2; \\ +\infty & \text{se } \alpha < 2. \end{cases}\end{aligned}$$

Esercizio 3.

Innanzitutto osserviamo che la funzione $y(x) \equiv 0$ è soluzione singolare dell'equazione differenziale proposta. Inoltre, per $y \neq 0$, separando le variabili, si ottiene

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{2+x^2} \qquad \text{da cui} \qquad -\frac{1}{y(x)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C$$

ovvero le soluzioni richieste sono $y(x) \equiv 0$ a $y(x) = -\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C}$, con $C \in \mathbb{R}$. Osserviamo che quest'ultima soluzione è definita su tutto l'asse reale solo se $C \notin (-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}})$, mentre per $C \in (-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \frac{\pi}{2\sqrt{2}})$ essa è definita per $x \in (-\infty, \sqrt{2}\tan(-\sqrt{2}C))$ e per $x \in (\sqrt{2}\tan(-\sqrt{2}C), +\infty)$.

Esercizio 4.

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate in $(0,0)$ ed utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine di $\log(1+t)$ con $t = \rho^2\cos^2\theta$, si ottiene

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\log(1+x^2)}{(x^2+y^2)^{4/5}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\log(1+\rho^2\cos^2\theta)}{\rho^{8/5}} \\ &= \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^{8/5}} = \lim_{\rho\to0^+} \rho^{2/5}\cos^2\theta = 0 = f(0,0)\end{aligned}$$

indipendentemente da θ, pertanto la funzione proposta è continua nell'origine.

Domanda 1.

- Data la serie $\sum a_n$, condizione necessaria affinché essa converga è che $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.
- Per la dimostrazione vedere libro di testo.

  Osserviamo che la condizione considerata non è sufficiente per la convergenza; ad esempio la serie armonica $\sum \frac{1}{n}$ è divergente a $+\infty$, nonostante si abbia $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Domanda 2.

- Vedere libro di teoria.
- Esempio 1: consideriamo la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in [-1,0]; \\ 1/x & \text{se } x \in (0,1]. \end{cases}$$

  Essa è definita nell'intervallo chiuso e limitato $[-1,1]$, ma non è limitata in quanto ha un'asintoto verticale destro in $x=0$. In questo caso il Teorema di Weierstrass non vale, poiché non è soddisfatta la richiesta che la funzione sia continua nell'intervallo considerato.

  Esempio 2: consideriamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad x \in (0,1]\ .$$

  Essa è definita e continua nell'intervallo limitato $(0,1]$, ma non è limitata in quanto ha un'asintoto verticale destro in $x=0$. In questo caso il Teorema di Weierstrass non vale, poiché non è soddisfatta la richiesta che l'intervallo considerato sia chiuso.