SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Poiché la funzione proposta è non negativa e continua nell'intervallo $(0,1)$, studiando il suo comportamento per $x \to 0^+$ e per $x \to 1^-$ otteniamo

$$\text{per } x \to 0^+ \quad f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x \sin 1} = \frac{1}{\sqrt{x}\sin 1} \quad \text{che è impropriamente integrabile;}$$
$$\text{per } x \to 1^- \quad f(x) \sim \frac{\sqrt{1-x}}{(1-x)\log 2} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\,\log 2} \quad \text{che è impropriamente integrabile.}$$

Pertanto la funzione proposta risulta impropriamente integrabile in $(0,1)$.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione proposta, in quanto somma di potenze positive, è continua sull'insieme chiuso e limitato E. Pertanto, grazie al Teorema di Weierstrass, essa ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Poiché l'insieme E può essere scritto sotto la forma di vincolo $E = \{g(x,y) = 2x^2 + 4y^2 - 1 = 0\}$, introduciamo la Lagrangiana $L(x,y,\lambda)$ associata al problema proposto e data da

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 3x^2 + 2y^2 + \lambda(2x^2 + 4y^2 - 1)\,.$$

Derivando, otteniamo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x + 4\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4y + 8\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = \pm\dfrac{1}{2} \\ \lambda = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \lambda = -\dfrac{3}{2} \\ y = 0 \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

che forniscono i seguenti quattro punti critici: $P_1 = (0, 1/2)$, $P_2 = (0, -1/2)$, $P_3 = (1/\sqrt{2}, 0)$ e $P_4 = (-1/\sqrt{2}, 0)$. Confrontando i valori della funzione nei punti trovati, si ottiene che $f(P_1) = f(P_2) = 1/2$, $f(P_3) = f(P_4) = 3/2$, quindi P_1 e P_2 sono punti di minimo assoluto per f in E mentre P_3 e P_4 sono punti di massimo assoluto per f in E.

Esercizio 3

L'insieme delle soluzioni complesse dell'equazione proposta è dato dall'insieme delle soluzioni delle due equazioni

$$2z^4 + 32 = 0 \qquad \text{e} \qquad 16z^2 + 24z + 13 = 0\,.$$

La prima si risolve determinando le quattro radici quarte complesse di -16, cioè:

$$z^4 = -16 \quad \implies \quad z = 2\sqrt[4]{-1} = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} = \begin{cases} \sqrt{2} + i\sqrt{2}\,; \\ -\sqrt{2} + i\sqrt{2}\,; \\ -\sqrt{2} - i\sqrt{2}\,; \\ \sqrt{2} - i\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

La seconda è un'equazione di secondo grado, le cui soluzioni si ottengono dalla usuale formula risolutiva, tenendo conto che la radice quadrata va fatta in campo complesso:

$$z = \frac{-12 + \sqrt{144 - 208}}{16} = \frac{-12 \pm 8i}{16} = \begin{cases} \dfrac{-3+2i}{4}\,; \\ \dfrac{-3-2i}{4}\,. \end{cases}$$