SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione a variabili separabili, che ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy. Separando le variabili, otteniamo

$$-\int \frac{dy}{y^n} = \int e^{nx}\, dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{1}{(n-1)y^{n-1}(x)} = \frac{1}{n}\, e^{nx} + C\,.$$

Esplicitando $y(x)$ ed imponendo la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \sqrt[n-1]{\frac{n}{(n-1)(e^{nx}+1)}}\,;$$

pertanto il limite proposto sarà dato da

$$\lim_{n\to+\infty} y^{n-1}\left(\frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{(n-1)(e^2+1)} = \frac{1}{e^2+1}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica ad essa associata è data da $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$, che ha come soluzione $\lambda = 2$, con molteplicità doppia. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea associata è

$$y_0(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)\,.$$

Utilizzando invece il metodo di somiglianza e tenendo conto che la funzione $x \mapsto 25\sin x$ non è soluzione dell'equazione omogenea, cercheremo una soluzione particolare nella forma $y_p(x) = A\sin x + B\cos x$.
Derivando ed inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$-A\sin x - B\cos x - 4A\cos x + 4B\sin x + 4A\sin x + 4B\cos x = 25\sin x\,.$$

Uguagliando i coefficienti delle funzioni $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto \cos x$, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -A + 4B + 4A = 25 \\ -B - 4A + 4B = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 3A + 4B = 25 \\ -4A + 3B = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzione $A = 3$, $B = 4$. Quindi la soluzione particolare cercata sarà data da $y_p(x) = 3\sin x + 4\cos x$ e l'integrale generale dell'equazione proposta sarà

$$y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + 3\sin x + 4\cos x\,.$$