SOLUZIONI COMPITO del 3/02/2011
ANALISI 1 - BIAR/BSIR 12 CFU
ANLISI 1 (I MODULO e/o II MODULO) - INFORMATICA + AUTOMATICA 5 o 5+5 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = -2x$, otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x-6} = -\sqrt[3]{6} = f(0)\,; \\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|2x-3|(\mathrm{e}^{-2x}-1)}{x} = \lim_{x\to 0^-} 3\frac{-2x}{x} = -6\,; \end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ ha un salto in } x=0.$$

Esercizio 2
Osserviamo che, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta è equivalente alle due equazioni

$$(|\mathrm{e}^{iz-3i}| - 1) = (|\mathrm{e}^{-b}\mathrm{e}^{i(a-3)}| - 1) = \mathrm{e}^{-b} - 1 = 0\,, \qquad \text{oppure} \qquad 8z^3 + 1 = 0\,.$$

La prima equazione fornisce $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$. La seconda condizione, invece, fornisce $z^3 = -1/8 = 1/8 \cdot \mathrm{e}^{i\pi}$, da cui

$$z_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\pi/3}\,, \qquad z_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\pi}\,, \qquad z_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i5\pi/3}\,.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_0 = a$, con $a \in \mathbb{R}$, $z_1 = 1/4 + i\sqrt{3}/4$, $\quad z_2 = -1/2$, $\quad z_3 = 1/4 - i\sqrt{3}/4$.

Esercizio 3
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/n$, otteniamo

$$\sin\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3)\,.$$

Pertanto, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} (3n^3+2)\left[\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to+\infty} 3n^3\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{n}\right] = -1/2\,.$$

Domanda 1
L' unica affermazione corretta è la 2) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione limitata (nel nostro caso $\{b_n^2\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$ si contraddice l' affermazione 1), mentre prendendo $a_n = 1/\sqrt{n}$ e $b_n \equiv 2$ si contraddice la 3).

Esercizio 4
Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{3(\mathrm{e}^{y^2}-1)}{\sqrt{x^2+y^2-2x+1}} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{3y^2}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{3\rho^2\sin^2\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} 3\rho\sin^2\theta = 0\,,$$

indipendentemente da θ. Osserviamo che, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $\mathrm{e}^{y^2} - 1 \sim y^2$, per $y \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(1, 0)$.

Esercizio 5

Osserviamo che la funzione proposta è continua, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, nell'intervallo $(0, 1]$; pertanto, al fine di stabilire se l'integrale improprio converge, basta studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $x \mapsto \log(1 + x)$ e $x \mapsto \sinh x$ otteniamo

$$f(x) \sim \frac{x^{2\alpha^2-2}}{x^{\alpha^2+5}} = \frac{1}{x^{-\alpha^2+7}}\,, \quad \text{per } x \to 0^+\,,$$

che, per il criterio del confronto asintotico, sarà impropriamente integrabile per $-\alpha^2 + 7 < 1$, ovvero $\alpha^2 > 6$, che fornisce $\{\alpha < -\sqrt{6}\} \cup \{\alpha > \sqrt{6}\}$.

Esercizio 6

Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = -x(1 + 2\mathrm{e}^{x^2}) \cos^2 y(x)$. Tale equazione ammette, come soluzioni singolari, le funzioni della forma $y(x) \equiv (2k + 1)\pi/2$; quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà data dalla soluzione singolare $y(x) = \pi/2$, definita per $x \in \mathbb{R}$. Separando, invece, le variabili si ottiene

$$\tan y(x) = \int \frac{1}{\cos^2 y}\, dy = -\int (x + 2x\mathrm{e}^{x^2})\, dx = -\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^{x^2} + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \arctan\left(-\frac{1}{2}x^2 - \mathrm{e}^{x^2} + C\right)$.

Domanda 2

L'affermazione a) è falsa, basta prendere $f(x, y) = x^3 + y^3$ che soddisfa le ipotesi, ma ha nell'origine un punto di sella e non un estremante.
L'affermazione b) è vera, perché un punto di sella è sempre un punto stazionario.
L'affermazione c) è falsa, poiché il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 7)$ è dato da $z = 2(x - 1) + 4(y - 7) + f(1, 7)$, che è parallelo al piano $2x + 4y - z = 0$ e non a quello proposto.
L'affermazione d) è falsa, poiché ogni funzione differenziabile in $\mathbb{R}$ è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$.

TEMA B

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 3x$, otteniamo

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x-11| + \sqrt[3]{(x^3+2x)^2+8} = 13 = f(0)\,; \\ &\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\frac{3\log(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} -3\frac{3x}{x} = -9\,; \end{aligned}\right. \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ ha un salto in } x = 0.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta è equivalente alle due equazioni

$$(|e^{z-3}| - 1) = (|e^{a-3}e^{ib}| - 1) = e^{a-3} - 1 = 0\,, \qquad \text{oppure} \qquad z^3 - 8 = 0\,.$$

La prima equazione fornisce $a = 3$ e $b \in \mathbb{R}$. La seconda condizione, invece, fornisce $z^3 = 8 = 8 \cdot e^{i0}$, da cui

$$z_1 = 2e^{i0}\,, \qquad z_2 = 2e^{i2\pi/3}\,, \qquad z_1 = 2e^{i4\pi/3}\,.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_0 = 3 + ib$, con $b \in \mathbb{R}$, $z_1 = 2$, $\quad z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $\quad z_3 = -1 - i\sqrt{3}$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/2n$, otteniamo

$$\log\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(1/n^2)\,.$$

Pertanto, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} (n^2 + 5n)\left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2n}\right] = \lim_{n\to+\infty} n^2\left[\frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} - \frac{1}{2n}\right] = -1/8\,.$$

Domanda 1

L' unica affermazione corretta è la 2) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione limitata (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{1/b_n\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n = 1/n$ e $b_n = \sqrt{n}$ si contraddice l' affermazione 1), mentre prendendo $b_n = \sqrt{n}$ e $a_n \equiv 5$ si contraddice la 3).

Esercizio 4

Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\log(1+2x^2)}{\sqrt{x^2+y^2-2y+1}} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho^2\cos^2\theta}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} 2\rho\cos^2\theta = 0\,,$$

indipendentemente da θ. Osserviamo che, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $\log(1+2x^2) \sim 2x^2$, per $x \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(0,1)$.

Esercizio 5

Osserviamo che la funzione proposta è continua, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, nell'intervallo $[1, +\infty)$; pertanto, al fine di stabilire se l'integrale improprio converge, basta studiare il comportamento di f per $x \to +\infty$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $t \mapsto \sinh t$, con $t = 1/x^{\alpha^2+8}$, e $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 1/x^{2\alpha^2+6}$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1/x^{\alpha^2+8}}{1/x^{2\alpha^2+6}} = \frac{1}{x^{-\alpha^2+2}}\,, \quad \text{per } x \to +\infty\,,$$

che, per il criterio del confronto asintotico, sarà impropriamente integrabile per $-\alpha^2 + 2 > 1$, ovvero $\alpha^2 < 1$, che fornisce $\{-1 < \alpha < 1\}$.

Esercizio 6

Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = \frac{\log(2+x)+2}{2+x}\sqrt{y(x)-1}$. Tale equazione ha un'unica soluzione singolare $y(x) \equiv 1$ che è anche soluzione del problema di Cauchy, definita per $x > -2$. Separando, invece, le variabili si ottiene

$$2\sqrt{y(x)-1} = \int \frac{1}{\sqrt{y-1}}\,dy = \int \frac{\log(2+x)+2}{2+x}\,dx = \frac{1}{2}\log^2(2+x) + 2\log(2+x) + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\log^2(2+x) + 2\log(2+x) + C\right)^2$.

Domanda 2

L'affermazione $a)$ è vera per definizione di punto critico.
L'affermazione $b)$ è falsa, basta prendere $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-5)^2$, che soddisfa l'ipotesi, ma ha nel punto $(3,5)$ un punto di minimo assoluto e non una sella.
L'affermazione $c)$ è vera, poiché ogni funzione differenziabile in $\mathbb{R}$ è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$.
L'affermazione $d)$ è falsa, poiché $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0)\cdot v$; quindi basta prendere $f(x,y) = x+y$ (che ha $\nabla f(0,0) = (1,1)$) e $v \neq 0$.

TEMA C

Esercizio 1
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 4x$, otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x-7| + \sqrt[5]{(x^2+3x)^4+1} = 8 = f(0)\,; \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} -\dfrac{|x-3|\log(1+4x)}{2x} = \lim_{x\to 0^+} -3\dfrac{4x}{2x} = -6\,; \end{array}\right\} \implies \quad f \text{ ha un salto in } x=0.$$

Esercizio 2
Osserviamo che, ponendo $z = a+ib$, l'equazione proposta è equivalente alle due equazioni

$$(|e^{2z-4}|-1) = (|e^{2a-4}e^{2ib}|-1) = e^{2a-4}-1 = 0\,, \qquad \text{oppure} \qquad z^3+8=0\,.$$

La prima equazione fornisce $a = 2$ e $b \in \mathbb{R}$. La seconda condizione, invece, fornisce $z^3 = -8 = 8\cdot e^{i\pi}$, da cui

$$z_1 = 2e^{i\pi/3}\,, \qquad z_2 = 2e^{i\pi}\,, \qquad z_1 = 2e^{i5\pi/3}\,.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_0 = 2+ib$, con $b\in\mathbb{R}$, $z_1 = 1+i\sqrt{3}$, $\quad z_2 = -2$, $\quad z_3 = 1-i\sqrt{3}$.

Esercizio 3
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \sqrt{1+t}$, con $t = 1/n$, otteniamo

$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{8n^2} + o(1/n^2)\,.$$

Pertanto, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty}(2n^2+4n)\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)} - 1 - \frac{1}{2n}\right] = \lim_{n\to+\infty} 2n^2\left[1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}-1-\frac{1}{2n}\right] = -1/4\,.$$

Domanda 1
L' unica affermazione corretta è la 3) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione limitata (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{1/b_n\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n = 1/n$ e $b_n = \sqrt{n}$ si contraddice l' affermazione 1), mentre prendendo $b_n = \sqrt{n}$ e $a_n \equiv 5$ si contraddice la 2).

Esercizio 4
Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\log(1+x^3/7)}{x^2+y^2-4y+4} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{x^3/7}{x^2+(y-2)^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{(\rho^3/7)\cos^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} (\rho/7)\cos^3\theta = 0\,,$$

indipendentemente da θ. Osserviamo che, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $\log(1+x^3/7) \sim x^3/7$, per $x \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(0,2)$.

Esercizio 5
Osserviamo che la funzione proposta è continua, per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, nell'intervallo $[1,+\infty)$; pertanto, al fine di stabilire se l'integrale improprio converge, basta studiare il comportamento di f per $x\to+\infty$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $t\mapsto\log(1+t)$ e $t\mapsto\sinh t$, con $t = 1/x$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1/x^{2\alpha^2-6}}{1/x^{\alpha^2+8}} = \frac{1}{x^{\alpha^2-14}}\,, \quad \text{per } x\to+\infty\,,$$

che, per il criterio del confronto asintotico, sarà impropriamente integrabile per $\alpha^2-14>1$, ovvero $\alpha^2>15$, che fornisce $\{\alpha<-\sqrt{15}\}\cup\{\alpha>\sqrt{15}\}$.

Esercizio 6

Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = -\frac{\log(x-3)-5}{x-3}\sqrt{2-y(x)}$. Tale equazione ha un'unica soluzione singolare $y(x) \equiv 2$ che è anche soluzione del problema di Cauchy, definita per $x > 3$. Separando, invece, le variabili si ottiene

$$-2\sqrt{2-y(x)} = \int \frac{1}{\sqrt{2-y}}\,dy = -\int \frac{\log(x-3)-5}{x-3}\,dx = -\frac{1}{2}\log^2(x-3) + 5\log(x-3) + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = 2 - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\log^2(x-3) - 5\log(x-3) - C\right)^2$.

Domanda 2

L'affermazione $a)$ è falsa, poiché $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v$; quindi basta prendere $f(x,y) = x+y$ (che ha $\nabla f(0,0) = (1,1)$) e $v \neq 0$.
L'affermazione $b)$ è vera per definizione di punto critico.
L'affermazione $c)$ è vera, poiché ogni funzione differenziabile in $\mathbb{R}$ è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$.
L'affermazione $d)$ è falsa, basta prendere $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-5)^2$, che soddisfa l'ipotesi, ma ha nel punto $(3,5)$ un punto di minimo assoluto e non una sella.

TEMA D

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = -2x$, otteniamo

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[5]{x-4} = -\sqrt[5]{4} = f(0)\,;\\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|2x-4|(\mathrm{e}^{-2x}-1)}{2x} = \lim_{x\to 0^-} 4\frac{-2x}{2x} = -4\,;\end{array}\right\} \implies \quad f \text{ ha un salto in } x = 0.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, ponendo $z = a + ib$, l'equazione proposta è equivalente alle due equazioni

$$(|\mathrm{e}^{(z-4)/i}| - 1) = (|\mathrm{e}^{b}\mathrm{e}^{-i(a-4)}| - 1) = \mathrm{e}^b - 1 = 0\,, \qquad \text{oppure} \qquad 8z^3 - 1 = 0\,.$$

La prima equazione fornisce $b = 0$ e $a \in \mathbb{R}$. La seconda condizione, invece, fornisce $z^3 = 1/8 = 1/8 \cdot \mathrm{e}^{i0}$, da cui

$$z_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i0}\,, \qquad z_2 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i2\pi/3}\,, \qquad z_1 = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i4\pi/3}\,.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_0 = a$, con $a \in \mathbb{R}$, $z_1 = 1/2$, $\quad z_2 = -1/4 + i\sqrt{3}/4$, $\quad z_3 = -1/4 - i\sqrt{3}/4$.

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \arctan t$, con $t = 1/n$, otteniamo

$$\arctan\frac{1}{n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} + o(1/n^3)\,.$$

Pertanto, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty}(4n^3+1)\left[\frac{\arctan 1}{n - \frac{1}{n}}\right] = \lim_{n\to+\infty} 4n^3\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{3n^3} - \frac{1}{n}\right] = -4/3\,.$$

Domanda 1

L' unica affermazione corretta è la 1) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione limitata (nel nostro caso $\{b_n^2\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$ si contraddice l' affermazione 2), mentre prendendo $a_n = 1/\sqrt{n}$ e $b_n \equiv 2$ si contraddice la 3).

Esercizio 4

Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{4(\mathrm{e}^{2y^3}-1)}{x^2+y^2-4x+4} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{8y^3}{(x-2)^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{8\rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} 8\rho\sin^3\theta = 0\,,$$

indipendentemente da θ. Osserviamo che, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $\mathrm{e}^{2y^3} - 1 \sim 2y^3$, per $y \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(2, 0)$.

Esercizio 5

Osserviamo che la funzione proposta è continua, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, nell'intervallo $(0, 1]$; pertanto, al fine di stabilire se l'integrale improprio converge, basta studiare il comportamento di f per $x \to 0^+$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per le funzioni $t \mapsto \sinh t$, con $t = x^{\alpha^2+5}$, e $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^{2\alpha^2+2}$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{x^{\alpha^2+5}}{x^{2\alpha^2+2}} = \frac{1}{x^{\alpha^2-3}}\,, \quad \text{per } x \to 0^+\,,$$

che, per il criterio del confronto asintotico, sarà impropriamente integrabile per $\alpha^2 - 3 < 1$, ovvero $\alpha^2 < 4$, che fornisce $\{-2 < \alpha < 2\}$.

Esercizio 6

Osserviamo che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = x^2(1 + 3e^{x^3}) \sin^2 y(x)$. Tale equazione ammette, come soluzioni singolari, le funzioni della forma $y(x) \equiv 2k\pi$; quindi la soluzione del problema di Cauchy sarà data dalla soluzione singolare $y(x) = 0$, definita per $x \in \mathbb{R}$. Separando, invece, le variabili si ottiene

$$-\cot y(x) = \int \frac{1}{\sin^2 y}\, dy = \int (x^2 + 3x^2 e^{x^3})\, dx = \frac{1}{3}x^3 + e^{x^3} + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \arctan\left(-\frac{1}{(1/3)x^3 + e^{x^3} + C}\right)$.

Domanda 2

L'affermazione a) è falsa, poiché ogni funzione differenziabile in $\mathbb{R}$ è continua in tutti i punti di $\mathbb{R}$.
L'affermazione b) è falsa, basta prendere $f(x, y) = x^3 + y^3$ che soddisfa le ipotesi, ma ha nell'origine un punto di sella e non un estremante.
L'affermazione c) è vera, perché un punto di sella è sempre un punto stazionario.
L'affermazione d) è falsa, poiché il piano tangente al grafico di f nel punto $(1, 7)$ è dato da $z = 2(x - 1) + 4(y - 7) + f(1, 7)$, che è parallelo al piano $2x + 4y - z = 0$ e non a quello proposto.