SOLUZIONI COMPITO del 3/02/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Effettuando la sostituzione $t = \arctan(3\sqrt{x})$, da cui $dt = \frac{3}{(1+9x)2\sqrt{x}}\,dx$, $t(0) = 0$, $t(1/9) = \pi/4$, si ottiene

$$\int_0^{1/9} \frac{\mathrm{e}^{\arctan(3\sqrt{x})}}{\left(\frac{1}{9}+x\right)\sqrt{x}}\,dx = 6\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^t\,dt = 6(\mathrm{e}^{\pi/4}-1)\,.$$

Esercizio 2
Osserviamo, innanzitutto, che $\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^n}}\right) \to 0$, per $n \to +\infty$. Pertanto, per $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ otteniamo, rispettivamente, $[0^{\sqrt{3}-1}] = 0$ e $[0^{+\infty}] = 0$. Al contrario, per $\alpha > 0$ abbiamo un caso di indecisione della forma $[0^0]$. Passiamo, quindi, alla forma esponenziale

$$a_n := \exp\left[(\sqrt{1+2/n^\alpha}-1)\log\Big(\sin(1/\sqrt{\mathrm{e}^n})\Big)\right] \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 1, \\ 1/\sqrt{\mathrm{e}} & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

poiché

$$(\sqrt{1+2/n^\alpha}-1)\log\Big(\sin(1/\sqrt{\mathrm{e}^n})\Big) \sim \frac{1}{n^\alpha}\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^n}}\right) = -\frac{n}{2n^\alpha} = -\frac{1}{2n^{\alpha-1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1, \\ -1/2 & \text{se } \alpha = 1, \\ -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = -1, 2$; pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4A + 2A - 2A = -1 \qquad \text{da cui} \qquad A = -1/4\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$$

Imponendo le condizioni richieste, ricaviamo $0 = y(0) = C_1 + C_2 - 1/4$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} C_2\mathrm{e}^{2x} = 0$ se e solo se $C_2 = 0$, che fornisce $C_1 = 1/4$. Quindi la soluzione richiesta è unica ed è data da

$$y(x) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-2x}\right)\,.$$

Esercizio 4
Inanzitutto, osserviamo che la funzione proposta è dispari, pertanto è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2\mathrm{e}^{x^2}}{2x\mathrm{e}^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{2}x = +\infty\,, \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{2x} = \frac{3}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad m = 3/2\,, \\
&\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{3}{2}x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2\mathrm{e}^{x^2} + 2\log|x| - 6x^2 - \frac{3}{2}x^2\sin x^4 - 3x^2\mathrm{e}^{x^2}}{x[4+\sin(x^4)+2\mathrm{e}^{x^2}]} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\log|x| - 6x^2 - \frac{3}{2}x^2\sin x^4}{2x\mathrm{e}^{x^2}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q = 0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = 3x/2$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 5

i) Ricordando che, per ipotesi, f è pari, e ponendo $y = 1/t$, con $t \to 0^+$, si ha che $y \to +\infty$ e

$$f(\log y) = f\left(\log \frac{1}{t}\right) = f(-\log t) = f(\log t) \sim t = \frac{1}{y}\,.$$

ii) Poiché f è continua, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Riscrivendo $x = \log(\mathrm{e}^x)$, dal punto i) con $y = \mathrm{e}^x$, otteniamo

$$f(x) = f\big(\log(\mathrm{e}^x)\big) \sim \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Poiché quest'ultima funzione è impropriamente integrabile a $+\infty$, l'integrale proposto esiste finito per il criterio del confronto asintotico.

TEMA B

Esercizio 1

Effettuando la sostituzione $t = \arctan(x^2/2)$, da cui $dt = \frac{x}{(1+x^2/4)}\,dx$, $t(0) = 0$, $t(\sqrt{2}) = \pi/4$, si ottiene

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x\,\mathrm{e}^{\arctan(x^2/2)}}{4+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/4} \mathrm{e}^t\,dt = \frac{1}{4}(\mathrm{e}^{\pi/4}-1)\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che $\log\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2n}}\right) \to 0$, per $n \to +\infty$. Pertanto, per $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ otteniamo, rispettivamente, $[0^{\mathrm{e}-1}] = 0$ e $[0^{+\infty}] = 0$. Al contrario, per $\alpha > 0$ abbiamo un caso di indecisione della forma $[0^0]$. Passiamo, quindi, alla forma esponenziale

$$a_n := \exp\left[(\mathrm{e}^{1/n^\alpha}-1)\log\log\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2n}}\right)\right] \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 1, \\ 1/\mathrm{e}^2 & \text{se } \alpha = 1, \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

poiché

$$(\mathrm{e}^{1/n^\alpha}-1)\log\log\left(1+\frac{1}{\mathrm{e}^{2n}}\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}\log\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{2n}}\right) = -\frac{2n}{n^\alpha} = -\frac{2}{n^{\alpha-1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1, \\ -2 & \text{se } \alpha = 1, \\ -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = -1, 3$; pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x}$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$4A - 4A - 3A = -6 \qquad \text{da cui} \qquad A = 2\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + 2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Imponendo le condizioni richieste, ricaviamo $0 = y(0) = C_1 + C_2 + 2$ e $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} C_1\mathrm{e}^{-x} = 0$ se e solo se $C_1 = 0$, che fornisce $C_2 = -2$. Quindi la soluzione richiesta è unica ed è data da

$$y(x) = 2\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}\right)\,.$$

Esercizio 4

Inanzitutto, osserviamo che la funzione proposta è pari, pertanto è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2\log x}{2x\log x} = \lim_{x\to+\infty} 2x = +\infty\,,\\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad m = 2\,,\\
&\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2\log x + \log x^2 - 6x - 2x\cos x - 4x^2\log x}{3 + \cos x + 2x\log x}\\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2 - 6x - 2x\cos x}{2x\log x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q = 0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = 2x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, mentre la retta di equazione $y = -2x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Esercizio 5

i) Ricordando che, per ipotesi, f è dispari, e ponendo $y = \mathrm{e}^{\log y}$, con $y \to +\infty$, si ha

$$f(-y) = -f(y) = -f\left(\mathrm{e}^{\log y}\right) \sim -\log y\,.$$

ii) Poiché f è continua, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to 0^-$. Riscrivendo $\frac{1}{x} = -\mathrm{e}^{\log(-1/x)}$, dal punto i), con $y = \mathrm{e}^{\log(-1/x)}$, otteniamo

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(-\mathrm{e}^{\log(-1/x)}\right) \sim -\log(-1/x) = \log(-x) = \frac{1}{x^0[\log(-x)]^{-1}} \qquad \text{per} \quad x \to 0^-\,.$$

Poiché quest'ultima funzione è impropriamente integrabile in un intorno di 0^-, l'integrale proposto esiste finito per il criterio del confronto asintotico.

TEMA C

Esercizio 1
Effettuando la sostituzione $t = \arctan(x^3/3)$, da cui $dt = \frac{x^2}{(1+x^6/9)}\,dx$, $t(0) = 0$, $t(\sqrt[3]{3}) = \pi/4$, si ottiene

$$\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{x^2 e^{2\arctan(x^3/3)}}{9+x^6}\,dx = \frac{1}{9}\int_0^{\pi/4} e^{2t}\,dt = \frac{1}{18}(e^{\pi/2}-1)\,.$$

Esercizio 2
Osserviamo, innanzitutto, che $\cosh\left(\frac{1}{e^{n^2}}\right) - 1 \to 0$, per $n \to +\infty$. Pertanto, per $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ otteniamo, rispettivamente, $[0^{\log 3}] = 0$ e $[0^{+\infty}] = 0$. Al contrario, per $\alpha > 0$ abbiamo un caso di indecisione della forma $[0^0]$. Passiamo, quindi, alla forma esponenziale

$$a_n := \exp\left[\log(1+2/n^\alpha)\log\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{e^{n^2}}\right)-1\right)\right] \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 2, \\ 1/e^4 & \text{se } \alpha = 2, \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2, \end{cases}$$

poiché

$$\log(1+2/n^\alpha)\log\left(\cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{e^{n^2}}\right)-1\right) \sim \frac{2}{n^\alpha}\log\left(\frac{1}{e^{2n^2}}\right) = -\frac{4n^2}{n^\alpha} = -\frac{4}{n^{\alpha-2}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2, \\ -4 & \text{se } \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 1, -3$; pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = Ae^{x/2}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$\frac{A}{4} + A - 3A = -7 \qquad \text{da cui} \qquad A = 4\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + 4\,e^{x/2}\,.$$

Imponendo le condizioni richieste, ricaviamo $0 = y(0) = C_1 + C_2 + 4$ e $\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} C_2 e^{-3x} = 0$ se e solo se $C_2 = 0$, che fornisce $C_1 = -4$. Quindi la soluzione richiesta è unica ed è data da

$$y(x) = 4\left(e^{x/2} - e^x\right)\,.$$

Esercizio 4
Inanzitutto, osserviamo che la funzione proposta è pari, pertanto è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2\log x}{2x\log x} = \lim_{x\to+\infty} 6x = +\infty\,, \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x}{x} = 6 \qquad \Longrightarrow \qquad m = 6\,, \\
&\lim_{x\to+\infty} [f(x) - 6x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{12x^2\log x + \log x - 6x - 6x\cos x^3 - 12x^2\log x}{1+\cos(x^3) + x\log x^2} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log x - 6x - 6x\cos x^3}{2x\log x} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q = 0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = 6x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$, mentre la retta di equazione $y = -6x$ è asintoto obliquo per $x \to -\infty$.

Esercizio 5

i) Ricordando che, per ipotesi, f è dispari, e ponendo $y = \mathrm{e}^{\log y}$, con $y \to +\infty$, si ha

$$f(-y) = -f(y) = -f\left(\mathrm{e}^{\log y}\right) \sim -\log y\,.$$

ii) Poiché f è continua, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to 0^-$. Riscrivendo $\frac{1}{x} = -\mathrm{e}^{\log(-1/x)}$, dal punto i), con $y = \mathrm{e}^{\log(-1/x)}$, otteniamo

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(-\mathrm{e}^{\log(-1/x)}\right) \sim -\log(-1/x) = \log(-x) = \frac{1}{x^0[\log(-x)]^{-1}} \qquad \text{per} \quad x \to 0^-\,.$$

Poiché quest'ultima funzione è impropriamente integrabile in un intorno di 0^-, l'integrale proposto esiste finito per il criterio del confronto asintotico.

TEMA D

Esercizio 1

Effettuando la sostituzione $t = \arctan(\sqrt[4]{x})$, da cui $dt = \frac{1}{(1+\sqrt{x})4x^{3/4}}\,dx$, $t(0) = 0$, $t(1) = \pi/4$, si ottiene

$$\int_0^1 \frac{e^{2\arctan(\sqrt[4]{x})+1}}{(1+\sqrt{x})x^{3/4}}\,dx = 4\int_0^{\pi/4} e^{2t+1}\,dt = 2(e^{\pi/2+1} - e)\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo, innanzitutto, che $\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{e^{n^2}}} - 1 \to 0$, per $n \to +\infty$. Pertanto, per $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$ otteniamo, rispettivamente, $[0^{\sinh 1}] = 0$ e $[0^{+\infty}] = 0$. Al contrario, per $\alpha > 0$ abbiamo un caso di indecisione della forma $[0^0]$. Passiamo, quindi, alla forma esponenziale

$$a_n := \exp\left[\sinh(1/n^\alpha)\log\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{e^{n^2}}} - 1\right)\right] \to \begin{cases} 1 & \text{se } \alpha > 2, \\ 1/e & \text{se } \alpha = 2, \\ 0 & \text{se } 0 < \alpha < 2, \end{cases}$$

poiché

$$\sinh(1/n^\alpha)\log\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{e^{n^2}}} - 1\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}\log\left(\frac{1}{e^{n^2}}\right) = -\frac{n^2}{n^\alpha} = -\frac{1}{n^{\alpha-2}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 2, \\ -1 & \text{se } \alpha = 2, \\ -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$. Essa ha come soluzioni $\lambda = 1, -2$; pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$. Dal metodo di somiglianza, otteniamo che la soluzione particolare $y_p(x)$ sarà della forma $y_p(x) = A e^{-x/2}$. Derivando quest'ultima due volte ed inserendo nell'equazione completa si ricava

$$\frac{A}{4} - \frac{A}{2} - 2A = \frac{9}{4} \qquad \text{da cui} \qquad A = -1\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - e^{-x/2}\,.$$

Imponendo le condizioni richieste, ricaviamo $0 = y(0) = C_1 + C_2 - 1$ e $\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} C_1 e^x = 0$ se e solo se $C_1 = 0$, che fornisce $C_2 = 1$. Quindi la soluzione richiesta è unica ed è data da

$$y(x) = e^{-2x} - e^{-x/2}\,.$$

Esercizio 4

Inanzitutto, osserviamo che la funzione proposta è dispari, pertanto è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Abbiamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 e^{x^2}}{3x^3 e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3}x = +\infty\,, \\
&\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \qquad \Longrightarrow \qquad m = 2/3\,, \\
&\lim_{x\to+\infty} \left[f(x) - \frac{2}{3}x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^4 e^{x^2} + \log x^2 - \frac{10}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^4\sin x^2 - 2x^4 e^{x^2}}{x^3[5+\sin(x^2)+3e^{x^2}]} \\
= &\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x^2 - \frac{10}{3}x^4 - \frac{2}{3}x^4 \sin x^2}{3x^3 e^{x^2}} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad q = 0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, la retta di equazione $y = 2x/3$ è asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$.

Esercizio 5

i) Ricordando che, per ipotesi, f è pari, e ponendo $y = 1/t$, con $t \to 0^+$, si ha che $y \to +\infty$ e

$$f(\log y) = f\left(\log \frac{1}{t}\right) = f(-\log t) = f(\log t) \sim t = \frac{1}{y}\,.$$

ii) Poiché f è continua, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. Riscrivendo $x = \log(\mathrm{e}^x)$, dal punto i) con $y = \mathrm{e}^x$, otteniamo

$$f(x) = f\big(\log(\mathrm{e}^x)\big) \sim \frac{1}{\mathrm{e}^x} \qquad \text{per} \quad x \to +\infty\,.$$

Poiché quest'ultima funzione è impropriamente integrabile a $+\infty$, l'integrale proposto esiste finito per il criterio del confronto asintotico.