SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

La funzione proposta è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha $f'(x) = 8 + 4e^x - 4e^{2x}$. Per studiare il segno di f', effettuiamo un cambiamento di variabile $t = e^x$ e studiamo la disequazione $-4t^2 + 4t + 8 \geq 0$, che ha come soluzioni e $-1 \leq t \leq 2$. Ricordando che $t = e^x > 0$, ricaviamo che

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } x < \log 2; \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } x > \log 2; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = \log 2.$$

Quindi $x_M = \log 2$ è punto di massimo assoluto per f su $\mathbb{R}$.

Poiché l'intervallo $[0, \log 10]$ è chiuso e limitato ed f è una funzione continua, dal Teorema di Weierstrass ricaviamo che f ammette massimo e minimo assoluto in tale intervallo. Poiché $x_M = \log 2 \in [0, \log 10]$, esso sarà il punto di massimo assoluto per f in tale intervallo, mentre il punto di minimo assoluto sarà l'estremo dell'intervallo in cui f raggiunge il valore più basso. Facendo i calcoli, otteniamo

$$f(0) = 2 \qquad \text{mentre} \qquad f(\log 10) = 8\log 10 + 40 - 200 < 0\,,$$

quindi $x_m = \log 10$ è il punto di minimo assoluto in $[0, \log 10]$.

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \geq 0$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine delle funzioni $\log(1 + t)$ e $\sin t$, si ottiene:

$$a_n := \left[\log\left(\frac{n + \sin^\alpha(1/n)}{n}\right)\right]^{(\alpha-1)} \sim \left[\frac{\sin^\alpha(1/n)}{n}\right]^{(\alpha-1)} \sim \left[\frac{1}{n}\,\frac{1}{n^\alpha}\right]^{(\alpha-1)} = \frac{1}{n^{(\alpha+1)(\alpha-1)}} = \frac{1}{n^{(\alpha^2-1)}}\,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se $\alpha^2 - 1 > 0$, ovvero $\alpha > 1$, e per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie converge per $\alpha^2 - 1 > 1$, ovvero $\alpha > \sqrt{2}$.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in quanto è ottenuta tramite operazioni algebriche o composizione di funzioni continue. Per studiarne la continuità nell'origine, dobbiamo invece applicare la definizione:

$$f \text{ è continua in } 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)\,.$$

Calcoliamo, quindi, i limiti destro e sinistro nell'origine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine della funzione $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(5x - 5\sin x)\log(2 + x)}{3x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{5x - 5x + \frac{5}{6}x^3}{3x^3}\log 2 = \frac{5}{18}\log 2\,;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 2\,.$$

Poiché i due limiti sono finiti ma diversi fra loro, otteniamo che f ha una discontinuità di prima specie, ovvero di salto, nel punto $x = 0$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la *d*), poiché in tali ipotesi si ha che $a_n b_n \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ (ovvero $a_n b_n n^{3/2} \leq 1$) definitivamente; infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n\, n^{3/2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\, o(1/\sqrt{n})\, n^{3/2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{o(1/\sqrt{n})}{1/\sqrt{n}} = 0\,.$$

Pertanto, dal criterio del confronto con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, otteniamo che $\sum a_n b_n$ converge.

Scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/n$ e $b_n \equiv 1$ si contraddice la risposta *a*).
Scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/\sqrt{n}$ e $b_n = 1/\sqrt{n}$ si contraddice la risposta *b*).
Scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/\sqrt{n}$ si contraddice la risposta *c*).

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

La funzione proposta è derivabile in tutto $\mathbb{R}^+$ e si ha $f'(x) = \frac{1}{x}\left(3\log^2 x + 2\log x - 1\right)$. Per studiare il segno di f', tenendo conto che $x > 0$, effettuiamo un cambiamento di variabile $t = \log x$ e studiamo la disequazione $3t^2 + 2t - 1 \geq 0$, che ha come soluzioni $t \leq -1$ e $t \geq 1/3$. Ricordando che $t = \log x$, ricaviamo che

$$\begin{array}{ll} f'(x) < 0 & \text{per } 1/\mathrm{e} < x < \sqrt[3]{\mathrm{e}}; \\ f'(x) > 0 & \text{per } 0 < x < 1/\mathrm{e},\ x > \sqrt[3]{\mathrm{e}}; \end{array} \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = 1/\mathrm{e},\ x = \sqrt[3]{\mathrm{e}}.$$

Quindi $x_m = \sqrt[3]{\mathrm{e}}$ è punto di minimo relativo per f su $\mathbb{R}^+$, mentre $x_M = 1/\mathrm{e}$ è punto di massimo relativo per f su $\mathbb{R}^+$.

Poiché l'intervallo $[1, 5]$ è chiuso e limitato ed f è una funzione continua, dal Teorema di Weierstrass ricaviamo che f ammette massimo e minimo assoluto in tale intervallo. Poiché $x_M = 1/\mathrm{e} \notin [1, 5]$, mentre $x_m = \sqrt[3]{\mathrm{e}} \in [1, 5]$, quest'ultimo sarà il punto di minimo assoluto per f in tale intervallo, mentre il punto di massimo assoluto sarà l'estremo dell'intervallo in cui f raggiunge il valore più alto. Facendo i calcoli, otteniamo

$$f(1) = 0 \qquad \text{mentre} \qquad f(5) = \log^3 5 + \log^2 5 - \log 5 > 0\,,$$

quindi $x_M = 5$ è il punto di massimo assoluto in $[1, 5]$.

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \leq 1$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine delle funzioni $\log(1 + t)$ e $\sin t$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a_n := \left[\log\left(\frac{n^{(1-\alpha)} + \sin(1/n)}{n^{(1-\alpha)}}\right)\right]^{(1/2-\alpha)} &\sim \left[\frac{\sin(1/n)}{n^{(1-\alpha)}}\right]^{(1/2-\alpha)} \\ \sim \left[\frac{1}{n^{(1-\alpha)}}\ \frac{1}{n}\right]^{(1/2-\alpha)} &= \frac{1}{n^{(2-\alpha)(1/2-\alpha)}} = \frac{1}{n^{(1-5\alpha/2+\alpha^2)}}\,. \end{aligned}$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se $1 - 5\alpha/2 + \alpha^2 > 0$, ovvero $\alpha < 1/2$, e per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie converge per $1 - 5\alpha/2 + \alpha^2 > 1$, ovvero $\alpha < 0$.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in quanto è ottenuta tramite operazioni algebriche o composizione di funzioni continue. Per studiarne la continuità nell'origine, dobbiamo invece applicare la definizione:

$$f \text{ è continua in } 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)\,.$$

Calcoliamo, quindi, i limiti destro e sinistro nell'origine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine della funzione $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\mathrm{e}^3/6\,;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\mathrm{e}^{x+3}(4x^2 \sin x - 4x^3)}{4x^5} = \lim_{x\to 0^-} \frac{4x^3 - \frac{2}{3}x^5 - 4x^3}{4x^5}\ \mathrm{e}^3 = -\mathrm{e}^3/6\,.$$

Poiché i due limiti sono uguali fra loro, ma $f(0) = 0$, otteniamo che f ha una discontinuità eliminabile nel punto $x = 0$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la *c*), poiché in tali ipotesi si ha che $a_n b_n \to +\infty$ e quindi non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza della serie. Pertanto $\sum a_n b_n$ diverge.

Scegliendo, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n \equiv 1$ si contraddice la risposta *a*).

Scegliendo, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n = 1/n^3$ si contraddice la risposta *b*).

Scegliendo, ad esempio, $a_n = n^3$ si contraddice la risposta *d*).

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

La funzione proposta è derivabile in tutto $\mathbb{R}^+$ e si ha $f'(x) = \frac{1}{x}\left(2 - 6\log^2 x - 4\log x\right)$. Per studiare il segno di f', tenendo conto che $x > 0$, effettuiamo un cambiamento di variabile $t = \log x$ e studiamo la disequazione $-6t^2 - 4t + 2 \geq 0$, che ha come soluzioni $-1 \leq t \leq 1/3$. Ricordando che $t = \log x$, ricaviamo che

$$\begin{array}{ll} f'(x) > 0 & \text{per } 1/\mathrm{e} < x < \sqrt[3]{\mathrm{e}}; \\ f'(x) < 0 & \text{per } 0 < x < 1/\mathrm{e},\ x > \sqrt[3]{\mathrm{e}}; \end{array} \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = 1/\mathrm{e},\ x = \sqrt[3]{\mathrm{e}}.$$

Quindi $x_m = 1/\mathrm{e}$ è punto di minimo relativo per f su $\mathbb{R}^+$, mentre $x_M = \sqrt[3]{\mathrm{e}}$ è punto di massimo relativo per f su $\mathbb{R}^+$.

Poiché l'intervallo $[1, 3]$ è chiuso e limitato ed f è una funzione continua, dal Teorema di Weierstrass ricaviamo che f ammette massimo e minimo assoluto in tale intervallo. Poiché $x_m = 1/\mathrm{e} \notin [1, 3]$, mentre $x_M = \sqrt[3]{\mathrm{e}} \in [1, 3]$, quest'ultimo sarà il punto di massimo assoluto per f in tale intervallo, mentre il punto di minimo assoluto sarà l'estremo dell'intervallo in cui f raggiunge il valore più basso. Facendo i calcoli, otteniamo

$$f(1) = 0 \qquad \text{mentre} \qquad f(3) = 2\log 3 - 2\log^3 3 - 2\log^2 3 < 0\,,$$

quindi $x_m = 3$ è il punto di minimo assoluto in $[1, 3]$.

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \geq -1$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine delle funzioni $\log(1 + t)$ e $\sin t$, si ottiene:

$$a_n := \left[\log\left(\frac{n + \sin\left(1/n^{(\alpha+1)}\right)}{n}\right)\right]^{(\alpha-2)} \sim \left[\frac{\sin\left(1/n^{(\alpha+1)}\right)}{n}\right]^{(\alpha-2)} \sim \left[\frac{1}{n}\,\frac{1}{n^{(\alpha+1)}}\right]^{(\alpha-2)} = \frac{1}{n^{(\alpha^2-4)}}\,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se $\alpha^2 - 4 > 0$, ovvero $\alpha > 2$, e per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie converge per $\alpha^2 - 4 > 1$, ovvero $\alpha > \sqrt{5}$.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in quanto è ottenuta tramite operazioni algebriche o composizione di funzioni continue. Per studiarne la continuità nell'origine, dobbiamo invece applicare la definizione:

$$f \text{ è continua in } 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)\,.$$

Calcoliamo, quindi, i limiti destro e sinistro nell'origine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine della funzione $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x + 1}{x} = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{(3x\sin x - 3x^2)\mathrm{e}^{2-x}}{4x^4} = \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^2 - \frac{1}{2}x^4 - 3x^2}{4x^4}\ \mathrm{e}^2 = -\mathrm{e}^2/8\,.$$

Poiché uno dei due limiti è infinito, otteniamo che f ha una discontinuità di seconda specie nel punto $x = 0$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la *b*), poiché in tali ipotesi si ha che $a_n b_n \geq \frac{1}{n}$ (ovvero $a_n b_n n \geq 1$) definitivamente; infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n n = \lim_{n\to+\infty} a_n \frac{1}{n}\ n = \lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty\,.$$

Pertanto, dal criterio del confronto con la serie armonica generalizzata di esponente 1, otteniamo che $\sum a_n b_n$ diverge.

Scegliendo, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n = 1/n^3$ si contraddice la risposta *a*).

Scegliendo, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n = 1/n$ si contraddice la risposta *c*).

Scegliendo, ad esempio, $a_n = n^5$ e $b_n = 1/n^5$ si contraddice la risposta *d*).

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

La funzione proposta è derivabile in tutto $\mathbb{R}$ e si ha $f'(x) = 2\mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} - 4$. Per studiare il segno di f', effettuiamo un cambiamento di variabile $t = \mathrm{e}^x$ e studiamo la disequazione $2t^2 - 2t - 4 \geq 0$, che ha come soluzioni $t \leq -1$ e $t \geq 2$. Ricordando che $t = \mathrm{e}^x > 0$, ricaviamo che

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } x < \log 2; \qquad f'(x) > 0 \quad \text{per } x > \log 2; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = \log 2.$$

Quindi $x_m = \log 2$ è punto di minimo assoluto per f su $\mathbb{R}$.

Poiché l'intervallo $[0, \log 10]$ è chiuso e limitato ed f è una funzione continua, dal Teorema di Weierstrass ricaviamo che f ammette massimo e minimo assoluto in tale intervallo. Poiché $x_m = \log 2 \in [0, \log 10]$, esso sarà il punto di minimo assoluto per f in tale intervallo, mentre il punto di massimo assoluto sarà l'estremo dell'intervallo in cui f raggiunge il valore più alto. Facendo i calcoli, otteniamo

$$f(0) = -2 \qquad \text{mentre} \qquad f(\log 10) = 100 - 20 - 4\log 10 > 0\,,$$

quindi $x_M = \log 10$ è il punto di massimo assoluto in $[0, \log 10]$.

Esercizio 2

Chiaramente la serie proposta è una serie a termini positivi per ogni $\alpha \geq 0$. Osserviamo, inoltre, che, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine delle funzioni $\log(1+t)$ e $\sin t$, si ottiene:

$$a_n := \left[\log\left(\frac{n^\alpha + \sin\left(1/n^3\right)}{n^\alpha}\right)\right]^{(\alpha-3)} \sim \left[\frac{\sin\left(1/n^3\right)}{n^\alpha}\right]^{(\alpha-3)} \sim \left[\frac{1}{n^\alpha}\,\frac{1}{n^3}\right]^{(\alpha-3)} = \frac{1}{n^{(\alpha+3)(\alpha-3)}} = \frac{1}{n^{(\alpha^2-9)}}\,.$$

Quindi il termine generale è infinitesimo se $\alpha^2 - 9 > 0$, ovvero $\alpha > 3$, e per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, la serie converge per $\alpha^2 - 9 > 1$, ovvero $\alpha > \sqrt{10}$.

Esercizio 3

La funzione proposta è ovviamente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, in quanto è ottenuta tramite operazioni algebriche o composizione di funzioni continue. Per studiarne la continuità nell'origine, dobbiamo invece applicare la definizione:

$$f \text{ è continua in } 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0)\,.$$

Calcoliamo, quindi, i limiti destro e sinistro nell'origine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine della funzione $\sin x$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{(4\sin x - 4x)\log(x+5)}{3x^3} = \lim_{x\to 0^+} \frac{4x - \frac{2}{3}x^3 - 4x}{3x^3}\ \log 5 = -(2/9)\log 5\,;$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = -(2/9)\log 5\,.$$

Poiché i due limiti sono uguali fra loro e coincidono con il valore $f(0)$, otteniamo che f è continua nel punto $x = 0$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la a), poiché in tali ipotesi si ha che $a_n b_n \leq \frac{l}{n^2}$ (ovvero $a_n b_n n^2 \leq l + 1$) definitivamente, dove $l := \lim b_n$; infatti

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n n^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\ b_n\ n^2 = \lim_{n\to+\infty} b_n = l\,.$$

Pertanto, dal criterio del confronto con la serie armonica generalizzata di esponente maggiore di 1, otteniamo che $\sum a_n b_n$ converge.

Scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/n^2$ e $b_n \equiv 1$ si contraddice la risposta b).
Scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/n$ e $b_n \equiv 1$ si contraddice la risposta c).
Scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/\sqrt{n}$ e $b_n = 1/\sqrt{n}$ si contraddice la risposta d).