SOLUZIONI COMPITO del 04/02/2014
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt{2|x-1|} = \sqrt{2} = f(0)\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\log[1+\sin^2(\sqrt{2}\,x)]}{\sqrt{x^4-3x^7}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin^2(\sqrt{2}\,x)}{\sqrt{x^4}} = \lim_{x\to 0^-} \frac{(\sqrt{2}\,x)^2]}{x^2} = 2 \neq f(0)\,;$$

pertanto, $x=0$ è un punto di salto per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x=1$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2|x-1|}}\,\mathrm{sign}(x-1) \qquad \text{per } x>0\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2}{2\sqrt{2|x-1|}} = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -\frac{2}{2\sqrt{2|x-1|}} = -\infty\,,$$

e quindi $x=1$ è un punto di cuspide.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che possiamo scrivere

$$a_n := \left[n^{\frac{1}{n+2}} - \cosh\sqrt{\frac{2\log n}{n+2}}\right]\sqrt{n} = \left[\mathrm{e}^{\frac{\log n}{n+2}} - \cosh\sqrt{\frac{2\log n}{n+2}}\right]\sqrt{n}$$
$$\sim \left[1+\frac{\log n}{n+2}+\frac{\log^2 n}{2(n+2)^2} - 1 - \frac{2\log n}{2(n+2)} - \frac{4\log^2 n}{4!(n+2)^2}\right]\sqrt{n} = \left[\frac{\log^2 n}{3(n+2)^2}\right]\sqrt{n} \sim \frac{1}{3n^{3/2}(\log n)^{-2}}\,,$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x\mapsto \mathrm{e}^x$, con $x=\frac{\log n}{n+2}\to 0$, per $n\to+\infty$, e quello al quarto ordine per la funzione $x\mapsto \cosh x$, con $x=\sqrt{\frac{2\log n}{n+2}}\to 0$, per $n\to+\infty$. Quindi, per confronto asintotico con la serie di Abel di esponenti $3/2>1$ e -2, si ricava che la serie proposta converge.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = (3x+1)\frac{1}{1+\tan^2[y(x)]}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\tan[y(x)] = \left(\int (1+\tan^2 y)\,dy\right)\Big|_{y=y(x)} = \int (3x+1)\,dx = 3\frac{x^2}{2}+x+C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $1=\tan(\pi/4)=\frac{3}{2}+1+C$, ovvero $C=-3/2$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \arctan\left[\frac{3x^2+2x-3}{2}\right]\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta è continua nell'intervallo $(0, 1]$; pertanto, per stabilire se essa è impropriamente integrabile in tale intervallo, è sufficiente studiarne il comportamento in un intorno destro di zero. A tal fine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto (1+t)^{3/4}$, con $t = 5x^2 + x^4$, e quello per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = (x + x^2/7)^{2\alpha}$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{(3/4)(5x^2 + x^4)}{(x + x^2/7)^{2\alpha}} \sim \frac{15x^2}{4x^{2\alpha}} = \frac{15}{4x^{2\alpha-2}} \,.$$

Pertanto, l'integrale proposto convergerà se e solo se $2\alpha - 2 < 1$, ovvero $0 < \alpha < 3/2$.

Esercizio 5

(A) l'affermazione è corretta, poiché dalle ipotesi si ottiene che $f(x^2) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$ che è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto asintotico per integrali.

(B) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}\log\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ per $x \to +\infty$, da cui si ricava $f(x^2) = \frac{1}{1+x\log x} \sim \frac{1}{x\log x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito.

(C) l'affermazione è vera, poiché dalle ipotesi si ottiene che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto asintotico per integrali.

(D) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = x^3$, da cui si ricava che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = \frac{1}{x^{3/2}}$, che è impropriamente integrabile a $+\infty$.

TEMA B

Esercizio 1
Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0;\pi/2\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\sin|x-\pi/2|=1\,,\\&\lim_{x\to0^-} f(x)=\lim_{x\to0^-}\frac{\sin\left[\log(1+x^2)\right]}{\sqrt{x^4-x^5}}=\lim_{x\to0^-}\frac{\log(1+x^2)}{\sqrt{x^4}}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2}{x^2}=1\,;\end{aligned}$$

poiché il limite destro e sinistro sono uguali, ma $f(0)=3$, $x=0$ risulta essere un punto di discontinuità eliminabile per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x=\pi/2$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x)=\cos|x-\pi/2|\,\mathrm{sign}(x-\pi/2)\qquad \text{per } x>0\,;$$

pertanto,

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\pi/2^+} f'(x)=\lim_{x\to\pi/2^+}\cos|x-\pi/2|=1\,,\\&\lim_{x\to\pi/2^-} f'(x)=\lim_{x\to\pi/2^-}-\cos|x-\pi/2|=-1\,,\end{aligned}$$

e quindi $x=1$ è un punto angoloso.

Esercizio 2
Innanzitutto, osserviamo che possiamo scrivere

$$\begin{aligned}a_n &:= \left[\cos\sqrt{\frac{2\log(n+4)}{n+4}}-(n+4)^{-\frac{1}{n+4}}\right]n=\left[\cos\sqrt{\frac{2\log(n+4)}{n+4}}-\mathrm{e}^{-\frac{\log(n+4)}{n+4}}\right]n\\&\sim\left[1-\frac{2\log(n+4)}{2(n+4)}+\frac{4\log^2(n+4)}{4!(n+4)^2}-1+\frac{\log(n+4)}{n+4}-\frac{\log^2(n+4)}{2(n+4)^2}\right]n\\&=-\left[\frac{\log^2(n+4)}{3(n+4)^2}\right]n\sim-\frac{1}{3n(\log n)^{-2}}\,,\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x\mapsto \mathrm{e}^x$, con $x=-\frac{\log(n+4)}{n+4}\to0$, per $n\to+\infty$, e quello al quarto ordine per la funzione $x\mapsto\cos x$, con $x=\sqrt{\frac{2\log(n+4)}{n+4}}\to0$, per $n\to+\infty$. Quindi, per confronto asintotico con la serie di Abel di esponenti 1 e $-2\le1$, si ricava che la serie proposta diverge.

Esercizio 3
Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x)=-\frac{3x^2+2x}{\sqrt3}\cos^2[y(x)]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, le cui soluzioni singolari sono date da $y(x)\equiv(2k+1)\pi/2$, $k\in\mathbb{Z}$. Tuttavia, poiché nessuna delle soluzioni singolari risolve il problema di Cauchy, procediamo per separazione di variabili. Integrando, otteniamo

$$\tan[y(x)]=\left(\int\frac{1}{\cos^2 y}\,dy\right)\Big|_{y=y(x)}=-\int\frac{3x^2+2x}{\sqrt3}\,dx=-\frac{x^3+x^2}{\sqrt3}+C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $-\sqrt3=\tan(-\pi/3)=-\frac{1+1}{\sqrt3}+C$, ovvero $C=-1/\sqrt3$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x)=\arctan\left[-\frac{x^3+x^2+1}{\sqrt3}\right]\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta è continua nell'intervallo $[1, +\infty)$; pertanto, per stabilire se essa è impropriamente integrabile in tale intervallo, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. A tal fine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto (1+t)^{2/3}$, con $t = \frac{2}{2x^2+3x^4}$, e quello per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \left(\frac{1}{x^7+x^9}\right)^\alpha$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{1}{x^7+x^9}\right)^\alpha}{\frac{4}{3(2x^2+3x^4)}} \sim \frac{9x^4}{4x^{9\alpha}} = \frac{9}{4x^{9\alpha-4}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto convergerà se e solo se $9\alpha - 4 > 1$, ovvero $\alpha > 5/9$.

Esercizio 5

(A) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = \sqrt{x}$, da cui si ricava che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito.

(B) l'affermazione è vera, poiché dalle ipotesi si ottiene che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) < \left(\frac{1}{x^2}\right)$ che è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto per integrali.

(C) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, che è impropriamente integrabile all'infinito.

(D) l'affermazione è vera, poiché dalle ipotesi si ottiene che, per $x \to +\infty$, $f\left(\sqrt{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto asintotico per integrali.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; -2\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left|\arctan\left(\frac{x+2}{2}\right)\right| = \pi/4\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin\left[e^{\pi x^2/4} - 1\right]}{\sqrt[3]{x^6 + x^8}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\pi x^2/4} - 1}{\sqrt[3]{x^6}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{(\pi/4)x^2}{x^2} = \pi/4\,;$$

poiché il limite destro e sinistro sono uguali, ma $f(0) = \sqrt{3}$, $x = 0$ risulta essere un punto di discontinuità eliminabile per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x = -2$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{1}{2\left[1 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right]} \operatorname{sign}(x+2) \qquad \text{per } x < 0\,;$$

pertanto,

$$\lim_{x\to -2^+} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{2\left[1 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right]} = 1/2\,,$$

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = \lim_{x\to -/2^-} -\frac{1}{2\left[1 + \left(\frac{x+2}{2}\right)^2\right]} = -1/2\,,$$

e quindi $x = -2$ è un punto angoloso.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che possiamo scrivere

$$\begin{aligned} a_n &:= \left[(n+2)^{-\frac{1}{n+2}} - \cos\sqrt{\frac{2\log(n+2)}{n+2}}\right] n = \left[e^{-\frac{\log(n+2)}{n+2}} - \cos\sqrt{\frac{2\log(n+2)}{n+2}}\right] n \\ &\sim \left[1 - \frac{\log(n+2)}{(n+2)} + \frac{\log^2(n+2)}{2(n+2)^2} - 1 + \frac{2\log(n+2)}{2(n+2)} - \frac{4\log^2(n+2)}{4!(n+2)^2}\right] n \\ &= \left[\frac{\log^2(n+2)}{3(n+2)^2}\right] n \sim \frac{1}{3n(\log n)^{-2}}\,, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto e^x$, con $x = -\frac{\log(n+2)}{n+2} \to 0$, per $n \to +\infty$, e quello al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cos x$, con $x = \sqrt{\frac{2\log(n+2)}{n+2}} \to 0$, per $n \to +\infty$. Quindi, per confronto asintotico con la serie di Abel di esponenti 1 e $-2 \le 1$, si ricava che la serie proposta diverge.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = -\frac{\sqrt{3}x^2+2x}{\sqrt{3}}\cos^2[y(x)]$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, le cui soluzioni singolari sono date da $y(x) \equiv (2k+1)\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Tuttavia, poiché nessuna delle soluzioni singolari risolve il problema di Cauchy, procediamo per separazione di variabili. Integrando, otteniamo

$$\tan[y(x)] = \left(\int \frac{1}{\cos^2 y}\,dy\right)\Big|_{y=y(x)} = -\int \frac{\sqrt{3}x^2 + 2x}{\sqrt{3}}\,dx = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{\sqrt{3}} + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $-\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan(-\pi/6) = -\frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}} + C$, ovvero $C = 1/3$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \arctan\left[-\frac{x^3 + \sqrt{3}x^2 - 1}{3}\right]\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta è continua nell'intervallo $[1, +\infty)$; pertanto, per stabilire se essa è impropriamente integrabile in tale intervallo, è sufficiente studiarne il comportamento per $x \to +\infty$. A tal fine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \frac{1}{x^3+3x^5}$, e quello per la funzione $t \mapsto (1+t)^{6/5}$, con $t = \frac{4}{2x+3x^3}$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{1}{x^3+3x^5}\right)^{\alpha}}{\frac{24}{5(2x+3x^3)}} \sim \frac{15x^3}{24 \cdot 3^{\alpha} x^{5\alpha}} = \frac{5}{8 \cdot 3^{\alpha} x^{5\alpha-3}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto convergerà se e solo se $5\alpha - 3 > 1$, ovvero $\alpha > 4/5$.

Esercizio 5

(A) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = \sqrt{x}$, da cui si ricava che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{x^2}\right) \sim \frac{1}{x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito.

(B) l'affermazione è vera, poiché dalle ipotesi si ottiene che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{x}\right) = o\left(\frac{1}{x^2}\right) < \left(\frac{1}{x^2}\right)$ che è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto per integrali.

(C) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = \frac{1}{1+x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$, che è impropriamente integrabile all'infinito.

(D) l'affermazione è vera, poiché dalle ipotesi si ottiene che, per $x \to +\infty$, $f(\sqrt{x}) \sim \frac{1}{x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto asintotico per integrali.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che in quanto combinazione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili e poiché il denominatore è sempre diverso da zero, la funzione proposta è sicuramente continua in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$. Per verificare il comportamento della funzione nell'origine, consideriamo

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \sqrt[3]{8|x+1|} = 2 = f(0)\,, \\
&\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-+} \frac{e^{\sqrt{2}\sin x} - 1}{\sqrt[3]{x^3 + x^4}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2}\sin x}{\sqrt[3]{x^3}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{2}\,x}{x} = \sqrt{2} \neq f(0)\,;
\end{aligned}$$

pertanto, $x = 0$ è un punto di salto per f e, quindi, mancando la continuità, la funzione non sarà neppure derivabile nell'origine. Invece, nel punto $x = -1$ la funzione è continua, quindi possiamo studiarne la derivabilità. A tal fine osserviamo che

$$f'(x) = \frac{8}{3(8|x+1|)^{2/3}} \operatorname{sign}(x+1) \qquad \text{per } x < 0\,;$$

pertanto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{8}{3(8|x+1|)^{2/3}} = +\infty\,, \\
&\lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} -\frac{8}{3(8|x+1|)^{2/3}} = -\infty\,,
\end{aligned}$$

e quindi $x = -1$ è un punto di cuspide.

Esercizio 2

Innanzitutto, osserviamo che possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
a_n &:= \left[\cosh\sqrt{\frac{2\log(n+3)}{n}} - (n+3)^{\frac{1}{n}}\right]\sqrt{n} = \left[\cosh\sqrt{\frac{2\log(n+3)}{n}} - e^{\frac{\log(n+3)}{n}}\right]\sqrt{n} \\
&\sim \left[1 + \frac{2\log(n+3)}{2n} + \frac{4\log^2(n+3)}{4!n^2} - 1 - \frac{\log(n+3)}{n} - \frac{\log^2(n+3)}{2n^2}\right]\sqrt{n} \\
&= -\left[\frac{\log^2(n+3)}{3n^2}\right]\sqrt{n} \sim -\frac{1}{3n^{3/2}(\log n)^{-2}}\,,
\end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto e^x$, con $x = \frac{\log(n+3)}{n} \to 0$, per $n \to +\infty$, e quello al quarto ordine per la funzione $x \mapsto \cosh x$, con $x = \sqrt{\frac{2\log(n+3)}{n}} \to 0$, per $n \to +\infty$. Quindi, per confronto asintotico con la serie di Abel di esponenti $3/2 > 1$ e -2, si ricava che la serie proposta converge.

Esercizio 3

Riscrivendo l'equazione differenziale nella forma $y'(x) = (2\sqrt{3}x + 2)\frac{1}{1+\tan^2[y(x)]}$, si ricava subito che essa è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari. Procedendo, quindi, per separazione di variabili e integrando, otteniamo

$$\tan[y(x)] = \left(\int (1 + \tan^2 y)\, dy\right)\Big|_{y=y(x)} = \int (2\sqrt{3}x + 2)\, dx = \sqrt{3}x^2 + 2x + C\,,$$

da cui, imponendo la condizione iniziale, si ricava $\sqrt{3} = \tan(\pi/3) = \sqrt{3} + 2 + C$, ovvero $C = -2$. Pertanto, la soluzione cercata sarà

$$y(x) = \arctan\left(\sqrt{3}x^2 + 2x - 2\right)\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo che la funzione proposta è continua nell'intervallo $(0,1]$; pertanto, per stabilire se essa è impropriamente integrabile in tale intervallo, è sufficiente studiarne il comportamento in un intorno destro di zero. A tal fine, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto (1+t)^{7/5}$, con $t = x^3 + 3x^5$, e quello per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = x + x^3/5$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{(7/5)(x^3 + 3x^5)}{(x + x^3/5)^{5\alpha/4}} \sim \frac{7x^3}{5x^{5\alpha/4}} = \frac{7}{5x^{5\alpha/4-3}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto convergerà se e solo se $5\alpha/4 - 3 < 1$, ovvero $0 < \alpha < 16/5$.

Esercizio 5

(A) l'affermazione è corretta, poiché dalle ipotesi si ottiene che $f(x^2) \sim \frac{1}{x^2}$ per $x \to +\infty$ che è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto asintotico per integrali.

(B) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}\log\sqrt{x}} = o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ per $x \to +\infty$, da cui si ricava $f(x^2) = \frac{1}{1+x\log x} \sim \frac{1}{x\log x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito.

(C) l'affermazione è vera, poiché dalle ipotesi si ottiene che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$ che non è impropriamente integrabile all'infinito, quindi l'affermazione segue dal criterio del confronto asintotico per integrali.

(D) l'affermazione è falsa, basta considerare $f(x) = x^3$, da cui si ricava che, per $x \to +\infty$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = \frac{1}{x^{3/2}}$, che è impropriamente integrabile a $+\infty$.