SOLUZIONI COMPITO del 4/07/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Utilizzando la formula ridotta per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, otteniamo

$$z = \sqrt{3}i \pm \sqrt{-3+4} = \sqrt{3}i \pm 1 \,.$$

Riscrivendo le soluzioni trovate in forma trigonometrica otteniamo

$$z_1 = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{2\pi i/3} \qquad z_2 = 1 + \sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{\pi i/3} \,.$$

Pertanto, avremo

$$\sqrt{z_1^5} = \sqrt{2^5\mathrm{e}^{10\pi i/3}} = \pm 2^{5/2}\mathrm{e}^{5\pi i/3} = \begin{cases} 2^{5/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{3/2}(1-\sqrt{3}i)\,, \\ -2^{5/2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2^{3/2}(-1+\sqrt{3}i)\,, \end{cases}$$

$$\sqrt{z_2^5} = \sqrt{2^5\mathrm{e}^{5\pi i/3}} = \pm 2^{5/2}\mathrm{e}^{5\pi i/6} = \begin{cases} 2^{5/2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2^{3/2}(-\sqrt{3}+i)\,, \\ -2^{5/2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2^{3/2}(\sqrt{3}-i)\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quinto ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 2x^{2/3}$, dato da

$$\begin{aligned} \sin t &= t - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + o(t^6) = 2x^{2/3} - \frac{1}{3!}(2x^{2/3})^3 + \frac{1}{5!}(2x^{2/3})^5 + o\big((2x^{2/3})^6\big) \\ &= 2x^{2/3} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^{10/3} + o(x^4)\,, \end{aligned}$$

e quello al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 2\sqrt{2}x/\sqrt{3}$, dato da

$$\begin{aligned} \cos t &= 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + o(t^5) = 1 - \frac{1}{2!}(2\sqrt{2}x/\sqrt{3})^2 + \frac{1}{4!}(2\sqrt{2}x/\sqrt{3})^4 + o\big((2\sqrt{2}x/\sqrt{3})^5\big) \\ &= 1 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{27}x^4 + o(x^5)\,, \end{aligned}$$

per $x \to 0^+$, otteniamo

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + 2x^{2/3} - \frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{15}x^{10/3} + o(x^4) - 1 + \frac{4}{3}x^2 - \frac{8}{27}x^4 + o(x^5) - 2x^{2/3} \\ &= \frac{4}{15}x^{10/3} - \frac{8}{27}x^4 + o(x^4) \sim \frac{4}{15}x^{10/3}\,. \end{aligned}$$

Quindi l'ordine di infinitesimo richiesto è 10/3.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili avente due soluzioni singolari $y(x) = \pm 1$, che risolvono il problema di Cauchy per $\lambda = 1$ e $\lambda = -1$, rispettivamente. Per ottenere le altre soluzioni, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\log\sqrt{\left|\frac{y-1}{y+1}\right|} = \frac{1}{2}\log|y-1| - \frac{1}{2}\log|y+1| = \int \frac{1}{(y-1)(y+1)}\,dy = \int dx = x + \widetilde{C}\,.$$

Risolvendo rispetto all'incognita y, si ricava l'integrale generale

$$\begin{aligned}
\sqrt{\left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right|} &= \mathrm{e}^{x+\widetilde{C}} &\qquad\Longrightarrow\qquad& \left|\frac{y(x)-1}{y(x)+1}\right| = \mathrm{e}^{2x}\mathrm{e}^{2\widetilde{C}}\\
\frac{y(x)-1}{y(x)+1} &= C\mathrm{e}^{2x} &\qquad\Longrightarrow\qquad& y(x)-1 = y(x)C\mathrm{e}^{2x} + C\mathrm{e}^{2x}\\
y(x)(1-C\mathrm{e}^{2x}) &= 1 + C\mathrm{e}^{2x} &\qquad\Longrightarrow\qquad& y(x) = \frac{1+C\mathrm{e}^{2x}}{1-C\mathrm{e}^{2x}}\,.
\end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo $\lambda = y(0) = \frac{1+C}{1-C}$, che fornisce $C = \frac{\lambda-1}{\lambda+1}$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{1+\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)\mathrm{e}^{2x}}{1-\left(\frac{\lambda-1}{\lambda+1}\right)\mathrm{e}^{2x}} = \frac{\lambda+1+(\lambda-1)\mathrm{e}^{2x}}{\lambda+1-(\lambda-1)\mathrm{e}^{2x}}\,.$$

Osserviamo che per $\lambda = \pm 1$ riotteniamo le due soluzioni singolari.

Esercizio 4

Studiamo, innanzitutto, gli estremanti della funzione f nell'intervallo $[0, 2\pi]$, utilizzando il Teorema di Fermat ed il criterio di monotonia:

$$f'(x) = \cos(2x) - \cos x = 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0\,.$$

Ponendo $\alpha = \cos x$, l'equazione proposta diviene $2\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, che ha per soluzioni $\alpha = \frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4} = 1, -1/2$. Quindi si ricava

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & \text{se } \cos x < -1/2 \text{ o } \cos x > 1, \text{ ovvero se } 2\pi/3 < x < 4\pi/3,\\ = 0 & \text{se } \cos x = -1/2 \text{ o } \cos x = 1, \text{ ovvero se } x = 2\pi/3,\ x = 4\pi/3,\ x = 0 \text{ e } x = 2\pi,\\ < 0 & \text{se } \cos x > -1/2 \text{ o } \cos x < 1, \text{ ovvero se } 0 < x < 2\pi/3 \text{ e } 4\pi/3 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 0$ e $x = 4\pi/3$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 2\pi/3$ e $x = 2\pi$ sono punti di minimo relativo. Calcolando $f(0) = 0$ ed $f(4\pi/3) = \sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/2 = 3\sqrt{3}/4$, otteniamo che $x = 4\pi/3$ è punto di massimo assoluto. Calcolando, invece, $f(2\pi/3) = -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/2 = -3\sqrt{3}/4$ ed $f(2\pi) = 0$, otteniamo che $x = 2\pi/3$ è punto di minimo assoluto.

Esercizio 5

Osserviamo, innanzitutto, che le serie sono tutte a termini positivi.

a) L'affermazione è vera, poiché

$$\frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1/n}{n^2} \sim \frac{1}{n^3} \qquad\Longrightarrow\qquad \log\left(1+\frac{b_n}{a_n}\right) \sim \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1}{n^3}\,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.

b) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$a_n b_n = n^2\frac{1}{n} = n \qquad\Longrightarrow\qquad \frac{1}{1+a_n b_n} = \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n}\,.$$

Quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.

$c)$ L'affermazione è vera poiché

$$a_n b_n \sim n^2 \frac{1}{n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n b_n}{1 + b_n a_n} \sim \frac{n}{1+n} \to 1 \neq 0\,,$$

cioè il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

$d)$ L'affermazione è falsa, basta considerare nuovamente $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$\frac{a_n b_n^2}{1 + a_n^2 b_n} = \frac{n^2 \frac{1}{n^2}}{1 + n^4 \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+n^3} \sim \frac{1}{n^3}\,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.

TEMA B

Esercizio 1
Utilizzando la formula ridotta per la risoluzione delle equazioni di secondo grado, otteniamo

$$z = -\sqrt{3}i \pm \sqrt{-3+4} = -\sqrt{3}i \pm 1\,.$$

Riscrivendo le soluzioni trovate in forma trigonometrica otteniamo

$$z_1 = -1-\sqrt{3}i = 2\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{4\pi i/3} \qquad z_2 = 1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{5\pi i/3}\,.$$

Pertanto, avremo

$$\sqrt{z_1^3} = \sqrt{2^3\mathrm{e}^{4\pi i}} = \pm\sqrt{8}\mathrm{e}^{2\pi i} = \begin{cases} \sqrt{8}\,, \\ -\sqrt{8}\,, \end{cases}$$

$$\sqrt{z_2^3} = \sqrt{2^3\mathrm{e}^{5\pi i}} = \pm\sqrt{8}\mathrm{e}^{5\pi i/2} = \begin{cases} \sqrt{8}i\,, \\ -\sqrt{8}i\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al quarto ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 2x^{2/5}$, dato da

$$\begin{aligned}\cos t &= 1-\frac{1}{2!}t^2+\frac{1}{4!}t^4+o(t^5) = 1-\frac{1}{2!}(2x^{2/5})^2+\frac{1}{4!}(2x^{2/5})^4+o\big((2x^{2/5})^5\big) \\ &= 1-2x^{4/5}+\frac{2}{3}x^{8/5}+o(x^2)\,,\end{aligned}$$

e quello al quinto ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \sqrt[3]{12}x^{4/15}$, dato da

$$\begin{aligned}\sin t &= t-\frac{1}{3!}t^3+\frac{1}{5!}t^5+o(t^6) = \sqrt[3]{12}x^{4/15}-\frac{1}{3!}(\sqrt[3]{12}x^{4/15})^3+\frac{1}{5!}(\sqrt[3]{12}x^{4/15})^5+o\big((\sqrt[3]{12}x^{4/15})^6\big) \\ &= \sqrt[3]{12}x^{4/15}-2x^{4/5}+\frac{\sqrt[3]{(12)^5}}{120}x^{4/3}+o(x^{8/5})\,,\end{aligned}$$

per $x \to 0^+$, otteniamo

$$\begin{aligned}f(x) &= 1-1+2x^{4/5}-\frac{2}{3}x^{8/5}+o(x^2)+\sqrt[3]{12}x^{4/15}-2x^{4/5}+\frac{\sqrt[3]{(12)^5}}{120}x^{4/3}+o(x^{8/5})-\sqrt[3]{12}x^{4/15} \\ &= -\frac{2}{3}x^{8/5}+\frac{\sqrt[3]{(12)^5}}{120}x^{4/3}+o(x^{8/5}) \sim \frac{\sqrt[3]{(12)^5}}{120}x^{4/3} = \frac{\sqrt[3]{18}}{5}x^{4/3}\,.\end{aligned}$$

Quindi l'ordine di infinitesimo richiesto è 4/3.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili avente due soluzioni singolari $y(x) = \pm 1/2$, che risolvono il problema di Cauchy per $\lambda = 1/2$ e $\lambda = -1/2$, rispettivamente. Per ottenere le altre soluzioni, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\log\sqrt[4]{\left|\frac{1+2y}{1-2y}\right|} = -\frac{1}{4}\log|1-2y|+\frac{1}{4}\log|1+2y| = \int\frac{1}{(1-2y)(1+2y)}\,dy = \int dx = x+\widetilde{C}\,.$$

Risolvendo rispetto all'incognita y, si ricava l'integrale generale

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{\left|\frac{1+2y(x)}{1-2y(x)}\right|} &= \mathrm{e}^{x+\widetilde{C}} &&\Longrightarrow && \left|\frac{1+2y(x)}{1-2y(x)}\right| = \mathrm{e}^{4x}\mathrm{e}^{4\widetilde{C}} \\ \frac{1+2y(x)}{1-2y(x)} &= C\mathrm{e}^{4x} &&\Longrightarrow && 1+2y(x) = C\mathrm{e}^{4x}-2y(x)C\mathrm{e}^{4x} \\ 2y(x)(1+C\mathrm{e}^{4x}) &= C\mathrm{e}^{4x}-1 &&\Longrightarrow && y(x) = \frac{C\mathrm{e}^{4x}-1}{2C\mathrm{e}^{4x}+2}\,.\end{aligned}$$

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo $\lambda = y(0) = \frac{C-1}{2C+2}$, che fornisce $C = \frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = \frac{\frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}\mathrm{e}^{4x} - 1}{2\frac{1+2\lambda}{1-2\lambda}\mathrm{e}^{4x} + 2} = \frac{(1+2\lambda)\mathrm{e}^{4x} - (1-2\lambda)}{(2+4\lambda)\mathrm{e}^{4x} + 2 - 4\lambda}\,.$$

Osserviamo che per $\lambda = \pm 1/2$ riotteniamo le due soluzioni singolari.

Esercizio 4

Studiamo, innanzitutto, gli estremanti della funzione f nell'intervallo $[0, 2\pi]$, utilizzando il Teorema di Fermat ed il criterio di monotonia:

$$f'(x) = -\sin(2x) - \sin x = -\sin x(2\cos x + 1) = 0\,.$$

L'equazione proposta ha per soluzioni $x = 2\pi/3$, $x = 4\pi/3$, $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$. Quindi si ricava

$$f'(x) \begin{cases} < 0 & \text{se } 0 < x < 2\pi/3,\ \pi < x < 4\pi/3, \\ = 0 & \text{se } x = 2\pi/3, x = 4\pi/3 \text{ e } x = 0, \pi, 2\pi, \\ > 0 & \text{se } 2\pi/3 < x < \pi \text{ e } 4\pi/3 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Pertanto, $x = 0$, $x = \pi$ e $x = 2\pi$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 2\pi/3$ e $x = 4\pi/3$ sono punti di minimo relativo. Calcolando $f(0) = 3/2$, $f(\pi) = -1/2$ ed $f(2\pi) = 3/2$, otteniamo che $x = 0$ e $x = 2\pi$ sono entrambi punti di massimo assoluto. Calcolando, invece, $f(2\pi/3) = -3/4$ ed $f(4\pi/3) = -3/4$, otteniamo che $x = 2\pi/3$ e $x = 4\pi/3$ sono entrambi punti di minimo assoluto.

Esercizio 5

Osserviamo, innanzitutto, che le serie sono tutte a termini positivi.

a) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$\frac{a_n b_n^2}{1 + a_n^2 b_n} = \frac{n^2 \frac{1}{n^2}}{1 + n^4 \frac{1}{n}} = \frac{1}{1+n^3} \sim \frac{1}{n^3}\,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.

b) L'affermazione è vera poiché

$$a_n b_n \sim n^2 \frac{1}{n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{a_n b_n}{1 + b_n a_n} \sim \frac{n}{1+n} \to 1 \neq 0\,,$$

cioè il termine generale non soddisfa la condizione necessaria per la convergenza.

c) L'affermazione è vera, poiché

$$\frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1/n}{n^2} \sim \frac{1}{n^3} \qquad \Longrightarrow \qquad \log\left(1 + \frac{b_n}{a_n}\right) \sim \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{1}{n^3}\,.$$

Quindi la serie converge per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $3 > 1$.

d) L'affermazione è falsa, basta considerare nuovamente $a_n = n^2$ e $b_n = 1/n$, da cui

$$a_n b_n = n^2 \frac{1}{n} = n \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{1 + a_n b_n} = \frac{1}{1+n} \sim \frac{1}{n}\,.$$

Quindi la serie diverge per confronto asintotico con la serie armonica.