SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(1+x)y^2+(1+y^2)x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(1+\frac{xy^2+y^2x^2}{x^2+y^2}\right) =$$

$$\lim_{\rho\to0^+} \left(1+\frac{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta+\rho^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{\rho^2}\right) = \lim_{\rho\to0^+} \big(1+\rho(\cos\theta\sin^2\theta+\rho\cos^2\theta\sin^2\theta)\big) = 1$$

indipendentemente da θ.

Esercizio 2

La funzione integranda è continua su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$, quindi per stabilire il comportamento dell'integrale proposto dobbiamo studiare l'integranda in un intorno destro di 0 ed in un intorno di $+\infty$.

In $U(0^+)$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $\log(1+t)$, con $t=x^\alpha$, e ricordando gli ordini di infinitesimo, otteniamo

$$f(x)=\frac{x\log(1+x^\alpha)}{(x^4+x^2)^\alpha} \sim \frac{x\cdot x^\alpha}{x^{2\alpha}} = \frac{1}{x^{\alpha-1}} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } \alpha-1<1, \text{ ovvero per } \alpha<2.$$

In $U(+\infty)$, ricordando gli ordini di infinito, otteniamo

$$f(x)\sim\frac{\alpha\, x\log x}{x^{4\alpha}} = \frac{\alpha}{x^{4\alpha-1}(\log x)^{-1}} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } 4\alpha-1>1, \text{ ovvero per } \alpha>1/2.$$

Concludendo, l'integrale improprio proposto esiste finito se e solo se $1/2<\alpha<2$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili, che non ammette integrali singolari. Quindi, per determinare l'insieme delle soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\int \sqrt{y}\; dy = \int (4x^3+2x)\; dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{2}{3}\,[y(x)]^{3/2} = x^4+x^2+C\,;$$

pertanto l'integrale generale sarà dato da

$$y(x)=\left[\frac{3}{2}\,(x^4+x^2+C)\right]^{2/3}.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$1=y(0)=\left(\frac{3}{2}\,C\right)^{2/3} \qquad \Longrightarrow \qquad C=\frac{2}{3}.$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y(x)=\left[\frac{3}{2}\,(x^4+x^2)+1\right]^{2/3}$.

Domanda 1

L'unica risposta corretta è la b), poiché, per definizione, f è continua in $(1,2)$ se e solo se si ha

$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} f(x,y)=f(1,2)=3\,.$$

La risposta a) è falsa, in quanto, in generale, f potrebbe essere discontinua in $(1,2)$.
La risposta c) è falsa, in quanto, pur essendo derivabile, f potrebbe essere discontinua in $(1,2)$. Infatti, per le funzioni di due variabili, la derivabilità non implica la continuità.
La risposta d) è falsa, in quanto $f(\cdot,2)$ potrebbe essere discontinua in $(1,2)$, pur essendo monotona. In tal caso il limite proposto esisterebbe, ma potrebbe non coincidere con il valore 3.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1
Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+2y)y+(2+y)x^2}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(2+\frac{2x^2y}{x^2+y^2}\right) =$$
$$\lim_{\rho\to 0^+} \left(2+\frac{2\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2}\right) = \lim_{\rho\to 0^+} \left[2+2\rho(\cos^2\theta\sin\theta)\right] = 2$$

indipendentemente da θ.

Esercizio 2
La funzione integranda è continua su tutto l'intervallo $(0,+\infty)$, quindi per stabilire il comportamento dell'integrale proposto dobbiamo studiare l'integranda in un intorno destro di 0 ed in un intorno di $+\infty$.

In $U(0^+)$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $\log(1+t)$, con $t=x^3$, e ricordando gli ordini di infinitesimo, otteniamo

$$f(x) = \frac{x^{2\alpha}(1+x^2)}{(x^3+x)^\alpha\log(1+x^3)} \sim \frac{x^{2\alpha}}{x^\alpha\cdot x^3} = \frac{1}{x^{3-\alpha}} \quad \text{che è integrabile se e solo se } 3-\alpha<1, \text{ ovvero per } \alpha>2.$$

In $U(+\infty)$, ricordando gli ordini di infinito, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{x^{2\alpha}\cdot x^2}{3x^{3\alpha}\log x} = \frac{1}{3x^{\alpha-2}\log x} \qquad \text{che è integrabile se e solo se } \alpha-2>1, \text{ ovvero per } \alpha>3.$$

Concludendo, l'integrale improprio proposto esiste finito se e solo se $\alpha>3$.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale a variabili separabili, che non ammette integrali singolari. Quindi, per determinare l'insieme delle soluzioni di tale equazione, procediamo per separazione di variabili, ottenendo

$$\frac{3}{2}\int \sqrt{y+1}\,dy = \int \sin x\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad [y(x)+1]^{3/2} = -\cos x + C\,;$$

pertanto l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = -1 + [C-\cos x]^{2/3}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$3 = y(0) = -1 + [C-1]^{2/3} \qquad \Longrightarrow \qquad C=9.$$

Quindi, la soluzione del problema di Cauchy proposto è $y(x) = -1 + [9-\cos x]^{2/3}$.

Domanda 1
L'unica risposta corretta è la d), poiché, per definizione, f è continua in $(-1,0)$ se e solo se si ha

$$\lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y) = f(-1,0) \quad \text{che è un valore finito}\,.$$

La risposta a) è falsa, in quanto contraddice la continuità di f in $(-1,0)$.
La risposta b) è falsa, in quanto la differenziabilità implica la continuità, ma non viceversa.
La risposta c) è falsa, in quanto, per le funzioni di due variabili, non ci sono implicazioni tra la derivabilità e la continuità.