**SOLUZIONI COMPITO dello 05/02/2010**
**ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU**
**CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU**

**TEMA A**

**Esercizio 1**

Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 3\sin(1/n)$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 1/n$, si ottiene

$$a_n := \frac{\sqrt{n}+3}{2n+5}\,\log\left(1+3\sin(1/n)\right) \sim \frac{\sqrt{n}}{2n}\,3\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{3}{2\sqrt{n}}\,\frac{1}{n} = \frac{3}{2n^{3/2}}\,.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $> 1$, si ricava che la serie proposta converge.

**Esercizio 2**

L'equazione proposta è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv 0$. Essa sarà anche soluzione del problema di Cauchy per $\lambda = 0$. Invece, per $\lambda \neq 0$, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata fra le soluzioni ottenute con il metodo della separazione delle variabili. Dividiamo, quindi, ambo i membri dell'equazione per $y^2$ ed integriamo:

$$-\frac{1}{y} = \int \frac{1}{y^2}\,dy = 2\int x\log x\,dx = x^2\log x - \int x^2\,\frac{1}{x}\,dx = x^2\log x - \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Da ciò si ricava $y(x) = (\frac{x^2}{2} - x^2\log x + C)^{-1}$. Imponendo la condizione iniziale, otteniamo

$$\lambda = y(1) = \frac{1}{\frac{1}{2}+C} \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2} = \frac{2-\lambda}{2\lambda}\,,$$

e quindi

$$y(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{2} - x^2\log x + \frac{2-\lambda}{2\lambda}} = \frac{2\lambda}{\lambda x^2 - 2\lambda x^2\log x + 2 - \lambda}\,.$$

Concludiamo notando che, una volta riscritte nella forma finale, le soluzioni trovate ricomprendono anche la soluzione singolare $y(x) \equiv 0$.

**Esercizio 3**

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $[1,+\infty)$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno $I(+\infty)$. Tenendo conto dello sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $y \mapsto \sin y$, con $y = 1/x\sqrt{x}$ e di quello al primo ordine per la funzione $y \mapsto \mathrm{e}^y$, con $y = 1/\sqrt[3]{x}$, si ricava che, per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{1}{6(x\sqrt{x})^3}\right)^{2-\alpha}}{\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{\alpha}} = \frac{1}{6^{2-\alpha}}\,\frac{x^{\alpha/3}}{x^{9(2-\alpha)/2}} = \frac{1}{6^{2-\alpha}}\,\frac{1}{x^{9-29\alpha/6}}\,.$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $9 - 29\alpha/6 > 1$, ovvero per $\alpha < \frac{48}{29}$.

**Esercizio 4**

1) Innanzitutto, studiamo la monotonia della funzione nell'intervallo $[0, 2\pi]$, determinando il segno della sua derivata prima:

$$f'(x) = 2\sin x \cos x - 1 - \cos^2 x + \sin^2 x = 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x$$
$$= 2\cos x(\sin x - \cos x)\begin{cases} > 0 & \text{se } \pi/4 < x < \pi/2,\ 5\pi/4 < x < 3\pi/2; \\ = 0 & \text{se } x = \pi/4,\ \pi/2,\ 5\pi/4,\ 3\pi/2; \\ < 0 & \text{se } 0 < x < \pi/4,\ \pi/2 < x < 5\pi/4,\ 3\pi/2 < x < 2\pi. \end{cases}$$

Pertanto, i punti $x = 0,\ \pi/2,\ 3\pi/2$ sono punti di massimo relativo, mentre i punti $x = \pi/4,\ 5\pi/4,\ 2\pi$ sono punti di minimo relativo.

2) Per determinare le soluzioni dell'equazione proposta (che non sono altro che gli zeri della funzione appena studiata), utilizziamo il punto precedente per determinare la quota dei punti di massimo e di minimo relativo:

$$f(0) = 1 > 0\,; \qquad f(\pi/2) = 2 - \pi/2 > 0\,; \qquad f(3\pi/2) = 2 - 3\pi/2 < 0\,;$$
$$f(\pi/4) = -\pi/4 + 1 > 0\,; \qquad f(5\pi/4) = -5\pi/4 + 1 < 0\,; \qquad f(2\pi) = -2\pi + 1 < 0\,.$$

Pertanto, l'equazione proposta ha un'unica soluzione $x_0$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, localizzata in modo tale che $x_0 \in (\pi/2, 5\pi/4)$.

**Esercizio 5**

1) Tenendo conto che $\log n \to +\infty$, è possibile ottenere il risultato desiderato richiedendo che $\frac{1+a_n}{1+b_n} \to +\infty$; infatti nell'aritmetizzazione parziale di $R$ esteso si ha $\infty^\infty = \infty$. Inoltre, poiché $\frac{1+a_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$, basta scegliere, ad esempio, $a_n = n^2$ e $b_n = n$.

2) Osserviamo che

$$c_n := \left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n} = \mathrm{e}^{\log\left[\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n}\right]} = \mathrm{e}^{\log n\, \log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)} = \mathrm{e}^{\log n\, \log\left(1+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\right)}\,.$$

Tenendo inoltre conto che $\log\left(1 + \frac{a_n-b_n}{1+b_n}\right) \sim \frac{a_n-b_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n-b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0$, affinché $c_n \to +\infty$, è sufficiente determinare $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ in modo tale che $\log n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) \to +\infty$. Ciò si ha scegliendo, ad esempio, $a_n = \sqrt{\log n} + 1$ e $b_n = \sqrt{\log n}$, poiché in tal caso

$$\log n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = \log n\left(\frac{\sqrt{\log n}+1}{\sqrt{\log n}} - 1\right) \sim \log n \frac{1}{\sqrt{\log n}} = \sqrt{\log n} \to +\infty\,.$$

**Esercizio 6**

Il campo di esistenza $D$ della funzione proposta è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} y - 1 - \mathrm{e}^x > 0 \\ 4 - x^2 - (y-1)^2 > 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y > 1 + \mathrm{e}^x \\ x^2 + (y-1)^2 < 4 \end{cases}$$

che forniscono la regione di piano data dall'intersezione della parte interna alla circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio $r = 2$ e del sopragrafico della funzione $y = 1 + \mathrm{e}^x$.

## TEMA B

**Esercizio 1**

Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \log(1+4/\sqrt{n})$, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 4/\sqrt{n}$, si ottiene

$$a_n := \frac{3n+1}{5n^{3/2}+2} \sin\big(\log(1+4/\sqrt{n})\big) \sim \frac{3n}{5n^{3/2}} \log\left(1+\frac{4}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{3}{5\sqrt{n}} \frac{4}{\sqrt{n}} = \frac{12}{5n} .$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica, si ricava che la serie proposta diverge.

**Esercizio 2**

L'equazione proposta è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv -1$. Essa sarà anche soluzione del problema di Cauchy per $\lambda = 0$. Invece, per $\lambda \neq 0$, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata fra le soluzioni ottenute con il metodo della separazione delle variabili. Dividiamo, quindi, ambo i membri dell'equazione per $(y+1)^2$ ed integriamo:

$$-\frac{1}{(y+1)} = \int \frac{1}{(y+1)^2}\, dy = 2\int x\mathrm{e}^x\, dx = 2x\mathrm{e}^x - 2\int \mathrm{e}^x\, dx = 2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C .$$

Da ciò si ricava $y(x) = -1 - (2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + C)^{-1}$. Imponendo la condizione iniziale, otteniamo

$$\lambda - 1 = y(0) = -1 - \frac{1}{-2+C} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 2 - \frac{1}{\lambda} = \frac{2\lambda-1}{\lambda} ,$$

e quindi

$$y(x) = -1 - \frac{1}{2x\mathrm{e}^x - 2\mathrm{e}^x + \frac{2\lambda-1}{\lambda}} = -1 - \frac{\lambda}{2\lambda x\mathrm{e}^x - 2\lambda\mathrm{e}^x + 2\lambda - 1} .$$

Concludiamo notando che, una volta riscritte nella forma finale, le soluzioni trovate ricomprendono anche la soluzione singolare $y(x) \equiv -1$.

**Esercizio 3**

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $(0,1]$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno $I(0^+)$. Tenendo conto dello sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $y \mapsto \sin y$, con $y = \sqrt{x}$ e di quello al secondo ordine per la funzione $y \mapsto \log(1+y)$, con $y = x\sqrt[3]{x}$, si ricava che, per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{\left[\frac{1}{2}(x\sqrt[3]{x})^2\right]^{2\alpha}}{(\sqrt{x})^{1-2\alpha}} = \frac{1}{4^\alpha} \frac{x^{16\alpha/3}}{x^{(1-2\alpha)/2}} = \frac{1}{4^\alpha} \frac{1}{x^{1/2-19\alpha/3}} .$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $1/2 - 19\alpha/3 < 1$, ovvero per $\alpha > -\frac{3}{38}$.

**Esercizio 4**

1) Innanzitutto, studiamo la monotonia della funzione nell'intervallo $[-2\pi, 0]$, determinando il segno della sua derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 x + 1 - 2\sin x\cos x = 2\cos^2 x - 2\sin x\cos x \\ &= 2\cos x(\cos x - \sin x) \begin{cases} < 0 & \text{se } -7\pi/4 < x < -3\pi/2,\ -3\pi/4 < x < -\pi/2; \\ = 0 & \text{se } x = -7\pi/4,\ -3\pi/2,\ -3\pi/4,\ -\pi/2; \\ > 0 & \text{se } -2\pi < x < -7\pi/4,\ -3\pi/2 < x < -3\pi/4,\ -\pi/2 < x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

   Pertanto, i punti $x = -2\pi,\ -3\pi/2,\ -\pi/2$ sono punti di minimo relativo, mentre sono punti di massimo relativo i punti $x = -7\pi/4,\ -3\pi/4,\ 0$.

2) Per determinare le soluzioni dell'equazione proposta (che non sono altro che gli zeri della funzione appena studiata), utilizziamo il punto precedente per determinare la quota dei punti di massimo e di minimo relativo:

$$\begin{array}{lll} f(-2\pi) = -2\pi + 1 < 0\,; & f(-3\pi/2) = -3\pi/2 < 0\,; & f(-\pi/2) = -\pi/2 < 0\,; \\ f(-7\pi/4) = -7\pi/4 + 1 < 0\,; & f(-3\pi/4) = -3\pi/4 + 1 < 0\,; & f(0) = 1 > 0\,. \end{array}$$

   Pertanto, l'equazione proposta ha un'unica soluzione $x_0$ nell'intervallo $[-2\pi, 0]$, localizzata in modo tale che $x_0 \in (-\pi/2, 0)$.

**Esercizio 5**

1) Tenendo conto che $e^n \to +\infty$, è possibile ottenere il risultato desiderato richiedendo che $\frac{1+a_n}{1+b_n} \to 0$; infatti nell'aritmetizzazione parziale di $R$ esteso si ha $0^\infty = 0$. Inoltre, poiché $\frac{1+a_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$, basta scegliere, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n = n^2$.
2) Osserviamo che

$$c_n := \left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{e^n} = e^{\log\left[\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{e^n}\right]} = e^{e^n \log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)} = e^{e^n \log\left(1+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\right)}.$$

Tenendo inoltre conto che $\log\left(1+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\right) \sim \frac{a_n-b_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n-b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0$, affinché $c_n \to 0$, è sufficiente determinare $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ in modo tale che $e^n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right) \to -\infty$. Ciò si ha scegliendo, ad esempio, $a_n = n-1$ e $b_n = n$, poiché in tal caso

$$e^n\left(\frac{a_n}{b_n}-1\right) = e^n\left(\frac{n-1}{n}-1\right) = e^n\left(1-\frac{1}{n}-1\right) = -\frac{e^n}{n} \to -\infty\,.$$

**Esercizio 6**

Il campo di esistenza $D$ della funzione proposta è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} y-1-e^x > 0 \\ 4-x^2-(y-1)^2 > 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y > 1+e^x \\ x^2+(y-1)^2 < 4 \end{cases}$$

che forniscono la regione di piano data dall'intersezione della parte interna alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio $r=2$ e del sopragrafico della funzione $y = 1+e^x$.

## TEMA C

**Esercizio 1**

Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \log(1+3/\sqrt{n})$, e per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 3/\sqrt{n}$, si ottiene

$$a_n := \frac{5\sqrt{n}+2}{4n+3} \sin\left(\log(1+3/\sqrt{n})\right) \sim \frac{5\sqrt{n}}{4n} \log\left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{5}{4\sqrt{n}}\,\frac{3}{\sqrt{n}} = \frac{15}{4n}\,.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica, si ricava che la serie proposta diverge.

**Esercizio 2**

L'equazione proposta è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv -1$. Essa sarà anche soluzione del problema di Cauchy per $\lambda = 0$. Invece, per $\lambda \neq 0$, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata fra le soluzioni ottenute con il metodo della separazione delle variabili. Dividiamo, quindi, ambo i membri dell'equazione per $(y+1)^4$ ed integriamo:

$$-\frac{1}{3(y+1)^3} = \int \frac{1}{(y+1)^4}\,dy = -\frac{1}{3}\int x\mathrm{e}^x\,dx = -\frac{x\mathrm{e}^x}{3} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{3}\,dx = -\frac{x\mathrm{e}^x}{3} + \frac{\mathrm{e}^x}{3} + C\,.$$

Da ciò si ricava $y(x) = -1 + (x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + C)^{-1/3}$. Imponendo la condizione iniziale, otteniamo

$$\lambda - 1 = y(0) = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{-1+C}} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1 + \frac{1}{\lambda^3} = \frac{\lambda^3+1}{\lambda^3}\,,$$

e quindi

$$y(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt[3]{x\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + \frac{\lambda^3+1}{\lambda^3}}} = -1 + \frac{\lambda}{\sqrt[3]{\lambda^3 x\mathrm{e}^x - \lambda^3\mathrm{e}^x + \lambda^3 + 1}}\,.$$

Concludiamo notando che, una volta riscritte nella forma finale, le soluzioni trovate ricomprendono anche la soluzione singolare $y(x) \equiv -1$.

**Esercizio 3**

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $(0,1]$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno $I(0^+)$. Tenendo conto dello sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $y \mapsto \sin y$, con $y = x\sqrt{x}$ e di quello al secondo ordine per la funzione $y \mapsto \log(1+y)$, con $y = \sqrt[5]{x}$, si ricava che, per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{(x\sqrt{x})^{2\alpha}}{\left(\frac{1}{2}(\sqrt[5]{x})^2\right)^{2+4\alpha}} = 2^{2+4\alpha}\frac{x^{3\alpha}}{x^{2(2+4\alpha)/5}} = 2^{2+4\alpha}\frac{1}{x^{4/5-7\alpha/5}}\,.$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $4/5 - 7\alpha/5 < 1$, ovvero per $\alpha > -\frac{1}{7}$.

**Esercizio 4**

1) Innanzitutto, studiamo la monotonia della funzione nell'intervallo $[-2\pi, 0]$, determinando il segno della sua derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\sin x\cos x - \cos^2 x + \sin^2 x - 1 = 2\sin x\cos x - 2\cos^2 x \\ &= 2\cos x(\sin x - \cos x)\begin{cases} > 0 & \text{se } -7\pi/4 < x < -3\pi/2,\ -3\pi/4 < x < -\pi/2; \\ = 0 & \text{se } x = -7\pi/4,\ -3\pi/2,\ -3\pi/4,\ -\pi/2; \\ < 0 & \text{se } -2\pi < x < -7\pi/4,\ -3\pi/2 < x < -3\pi/4,\ -\pi/2 < x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto, i punti $x = -2\pi,\ -3\pi/2,\ -\pi/2$ sono punti di massimo relativo, mentre sono punti di minimo relativo i punti $x = -7\pi/4,\ -3\pi/4,\ 0$.

2) Per determinare le soluzioni dell'equazione proposta (che non sono altro che gli zeri della funzione appena studiata), utilizziamo il punto precedente per determinare la quota dei punti di massimo e di minimo relativo:

$$f(-2\pi) = 2\pi - 1 > 0\,; \qquad f(-3\pi/2) = 3\pi/2 > 0\,; \qquad f(-\pi/2) = \pi/2 > 0\,;$$
$$f(-7\pi/4) = 7\pi/4 - 1 > 0\,; \qquad f(-3\pi/4) = 3\pi/4 - 1 > 0\,; \qquad f(0) = -1 < 0\,.$$

Pertanto, l'equazione proposta ha un'unica soluzione $x_0$ nell'intervallo $[-2\pi, 0]$, localizzata in modo tale che $x_0 \in (-\pi/2, 0)$.

**Esercizio 5**

1) Tenendo conto che $e^n \to +\infty$, è possibile ottenere il risultato desiderato richiedendo che $\frac{1+a_n}{1+b_n} \to 0$; infatti nell'aritmetizzazione parziale di $R$ esteso si ha $0^\infty = 0$. Inoltre, poiché $\frac{1+a_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$, basta scegliere, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n = n^2$.
2) Osserviamo che

$$c_n := \left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{e^n} = e^{\log\left[\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{e^n}\right]} = e^{e^n \log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)} = e^{e^n \log\left(1+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\right)}\,.$$

Tenendo inoltre conto che $\log\left(1+\frac{a_n-b_n}{1+b_n}\right) \sim \frac{a_n-b_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n-b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0$, affinché $c_n \to 0$, è sufficiente determinare $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ in modo tale che $e^n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) \to -\infty$. Ciò si ha scegliendo, ad esempio, $a_n = n-1$ e $b_n = n$, poiché in tal caso

$$e^n\left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = e^n\left(\frac{n-1}{n} - 1\right) = e^n\left(1 - \frac{1}{n} - 1\right) = -\frac{e^n}{n} \to -\infty\,.$$

**Esercizio 6**

Il campo di esistenza $D$ della funzione proposta è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} y - 1 - e^x > 0 \\ 4 - x^2 - (y-1)^2 > 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y > 1 + e^x \\ x^2 + (y-1)^2 < 4 \end{cases}$$

che forniscono la regione di piano data dall'intersezione della parte interna alla circonferenza di centro $(0,1)$ e raggio $r = 2$ e del sopragrafico della funzione $y = 1 + e^x$.

## TEMA D

**Esercizio 1**

Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \sin(5/n)$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 5/n$, si ottiene

$$a_n := \frac{2\sqrt{n}+5}{3n+4} \log\left(1+\sin(5/n)\right) \sim \frac{2\sqrt{n}}{3n} \sin\left(\frac{5}{n}\right) \sim \frac{2}{3\sqrt{n}}\,\frac{5}{n} = \frac{10}{3n^{3/2}}\,.$$

Pertanto, per confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $> 1$, si ricava che la serie proposta converge.

**Esercizio 2**

L'equazione proposta è un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili che ha come unica soluzione singolare la funzione costante $y(x) \equiv 0$. Essa sarà anche soluzione del problema di Cauchy per $\lambda = 0$. Invece, per $\lambda \neq 0$, la soluzione del problema di Cauchy andrà cercata fra le soluzioni ottenute con il metodo della separazione delle variabili. Dividiamo, quindi, ambo i membri dell'equazione per $y^4$ ed integriamo:

$$-\frac{1}{3y^3} = \int \frac{1}{y^4}\,dy = -\frac{2}{3}\int x\log x\,dx = -\frac{x^2\log x}{3} + \int x^2\,\frac{1}{3x}\,dx = -\frac{x^2\log x}{3} + \frac{x^2}{6} + C\,.$$

Da ciò si ricava $y(x) = (x^2\log x - \frac{x^2}{2} + C)^{-1/3}$. Imponendo la condizione iniziale, otteniamo

$$\lambda = y(1) = \frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+C}} \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{1}{\lambda^3} + \frac{1}{2} = \frac{2+\lambda^3}{2\lambda^3}\,,$$

e quindi

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2\log x - \frac{x^2}{2} + \frac{2+\lambda^3}{2\lambda^3}}} = \frac{\sqrt[3]{2}\lambda}{\sqrt[3]{2\lambda^3x^2\log x - \lambda^3x^2 + 2 + \lambda^3}}\,.$$

Concludiamo notando che, una volta riscritte nella forma finale, le soluzioni trovate ricomprendono anche la soluzione singolare $y(x) \equiv 0$.

**Esercizio 3**

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $[1,+\infty)$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno $I(+\infty)$. Tenendo conto dello sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $y \mapsto \sin y$, con $y = 1/\sqrt[4]{x}$ e di quello al primo ordine per la funzione $y \mapsto \mathrm{e}^y$, con $y = 1/x\sqrt[3]{x}$, si ricava che, per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^{1-\alpha}}{\left(\frac{1}{6(\sqrt[4]{x})^3}\right)^{\alpha}} = 6^\alpha\,\frac{x^{3\alpha/4}}{x^{4(1-\alpha)/3}} = 6^\alpha\,\frac{1}{x^{4/3-25\alpha/12}}\,.$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $4/3 - 25\alpha/12 > 1$, ovvero per $\alpha < \frac{4}{25}$.

**Esercizio 4**

1) Innanzitutto, studiamo la monotonia della funzione nell'intervallo $[0,2\pi]$, determinando il segno della sua derivata prima:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2 x - \sin^2 + 1 - 2\sin x\cos x = 2\cos^2 x - 2\sin x\cos x \\ &= 2\cos x(\cos x - \sin x)\begin{cases} < 0 & \text{se } \pi/4 < x < \pi/2,\ 5\pi/4 < x < 3\pi/2; \\ = 0 & \text{se } x = \pi/4,\ \pi/2,\ 5\pi/4,\ 2\pi; \\ > 0 & \text{se } 0 < x < \pi/4,\ \pi/2 < x < 5\pi/4,\ 3\pi/2 < x < 2\pi. \end{cases} \end{aligned}$$

Pertanto, i punti $x = 0,\, \pi/2,\, 3\pi/2$ sono punti di minimo relativo, mentre i punti $x = \pi/4,\, 5\pi/4,\, 2\pi$ sono punti di massimo relativo.

2) Per determinare le soluzioni dell'equazione proposta (che non sono altro che gli zeri della funzione appena studiata), utilizziamo il punto precedente per determinare la quota dei punti di massimo e di minimo relativo:

$$\begin{array}{lll} f(0) = -1 < 0\,; & f(\pi/2) = -2 + \pi/2 < 0\,; & f(3\pi/2) = -2 + 3\pi/2 > 0\,; \\ f(\pi/4) = \pi/4 - 1 < 0\,; & f(5\pi/4) = 5\pi/4 - 1 > 0\,; & f(2\pi) = 2\pi - 1 > 0\,. \end{array}$$

Pertanto, l'equazione proposta ha un'unica soluzione $x_0$ nell'intervallo $[0, 2\pi]$, localizzata in modo tale che $x_0 \in (\pi/2, 5\pi/4)$.

**Esercizio 5**

1) Tenendo conto che $\log n \to +\infty$, è possibile ottenere il risultato desiderato richiedendo che $\frac{1+a_n}{1+b_n} \to +\infty$; infatti nell'aritmetizzazione parziale di $R$ esteso si ha $\infty^\infty = \infty$. Inoltre, poiché $\frac{1+a_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$, basta scegliere, ad esempio, $a_n = n^2$ e $b_n = n$.
2) Osserviamo che

$$c_n := \left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n} = \mathrm{e}^{\log\left[\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)^{\log n}\right]} = \mathrm{e}^{\log n\, \log\left(\frac{1+a_n}{1+b_n}\right)}\,.$$

Tenendo inoltre conto che $\log\left(1 + \frac{a_n-b_n}{1+b_n}\right) \sim \frac{a_n-b_n}{1+b_n} \sim \frac{a_n-b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 0$, affinché $c_n \to +\infty$, è sufficiente determinare $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ in modo tale che $\log n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) \to +\infty$. Ciò si ha scegliendo, ad esempio, $a_n = \sqrt{\log n} + 1$ e $b_n = \sqrt{\log n}$, poiché in tal caso

$$\log n \left(\frac{a_n}{b_n} - 1\right) = \log n \left(\frac{\sqrt{\log n} + 1}{\sqrt{\log n}} - 1\right) \sim \log n \frac{1}{\sqrt{\log n}} = \sqrt{\log n} \to +\infty\,.$$

**Esercizio 6**

Il campo di esistenza $D$ della funzione proposta è determinato dalle condizioni

$$\begin{cases} y - 1 - \mathrm{e}^x > 0 \\ 4 - x^2 - (y-1)^2 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y > 1 + \mathrm{e}^x \\ x^2 + (y-1)^2 < 4 \end{cases}$$

che forniscono la regione di piano data dall'intersezione della parte interna alla circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio $r = 2$ e del sopragrafico della funzione $y = 1 + \mathrm{e}^x$.