SOLUZIONI COMPITO del 05/02/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Poiché
$$f'(x) = -2\sin x - 2\cos x + 4 = 2(1-\cos x) + 2(1-\sin x) \geq 0\,,$$
$$f''(x) = -2\cos x + 2\sin x\,,$$
si ottiene subito che f è monotona non decrescente in tutto $\mathbb{R}$ e avrà dei punti di flesso per $\sin x = \cos x$, cioè $x = \pi/4 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2
Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin della funzione $t \mapsto \cos t$, ovvero
$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + o(t^9) \qquad \text{per } t \to 0\,,$$
e tenendo conto che, dalle formule trigonometriche si ha
$$\sin x = \sin(x - 3\pi/2 + 3\pi/2) = \sin(x-3\pi/2)\cos(3\pi/2) + \cos(x-3\pi/2)\sin(3\pi/2) = -\cos(x-3\pi/2)\,,$$
ponendo $t = x - \frac{3}{2}\pi$ nello sviluppo precedente, otteniamo
$$\sin x = -\cos\left[\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)\right] = -1 + \frac{\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)^2}{2} - \frac{\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)^4}{4!} + \frac{\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)^6}{6!} - \frac{\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)^8}{8!} + o\left(\left(x-\frac{3}{2}\pi\right)^9\right).$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - (2+\alpha)\lambda + 2\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \alpha; 2$. Quindi,

- per $\alpha \neq 1; 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\alpha x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ae^x$, da cui $y_p'(x) = y_p''(x) = Ae^x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $A - (2+\alpha)A + 2\alpha A = 1$, da cui $A = \frac{1}{\alpha-1}$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{\alpha x} + \frac{1}{\alpha-1}e^x$;
- per $\alpha = 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, come nel caso precedente otteniamo che una soluzione particolare sarà $y_p(x) = Ae^x$ con $A = 1$; quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + e^x$;
- per $\alpha = 1$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Axe^x$, da cui $y_p'(x) = Ae^x(x+1)$ e $y_p''(x) = Ae^x(x+2)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $Ae^x(x+2) - 3Ae^x(x+1) + 2Axe^x = 1$, da cui $A = -1$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^x - xe^x$.

Esercizio 4
Osserviamo che, per $0 < \alpha < 1$, si ha che $f \in \mathcal{C}^0([0,\alpha])$, quindi l'integrale proposto esiste finito. Per $\alpha \geq 1$, dobbiamo studiare il comportamento della funzione per $x \to 1$. In tal caso si ha

- per $\alpha = 1$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt{1-x}}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \qquad \text{che converge poiché } 1/2 < 1;$$
- per $\alpha > 1$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\alpha-1}}{|1-x|^{2-\alpha}} \qquad \text{che converge per } 2-\alpha < 1, \text{ ovvero } \alpha > 1.$$

In conclusione, l'integrale proposto converge per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 5

a) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(-x) = -1 + \lim_{t\to 0^-} f(t) = -1+1=0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_1(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(-x) = 1 + \lim_{t\to 0^+} f(t) = 1-1=0\,,$$

dove abbiamo effettuato la sostituzione $t=-x$, si ottiene che g_1 ha in $x=0$ una discontinuità eliminabile in $x=0$.

b) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|f(x)|} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|-1|}(-1) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_2(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|f(x)|} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|1|}(1) = 0\,,$$

si ottiene che g_2 ha in $x=0$ una discontinuità eliminabile in $x=0$.

c) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_3(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x-1}{x} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_3(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1\,,$$

si ottiene che g_3 ha in $x=0$ una discontinuità salto in $x=0$.

d) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_4(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\mathrm{sign}[f(x)] = \lim_{x\to 0^+} |f(x)| = +1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_4(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)\mathrm{sign}[f(x)] = \lim_{x\to 0^-} |f(x)| = +1\,,$$

si ottiene che g_4 ha in $x=0$ una discontinuità eliminabile in $x=0$.

TEMA B

Esercizio 1

Poiché

$$f'(x) = -\sin x + \cos x - 2 = -(1 - \cos x) - (1 + \sin x) \leq 0\,,$$
$$f''(x) = -\cos x - \sin x\,,$$

si ottiene subito che f è monotona non crescente in tutto $\mathbb{R}$ e avrà dei punti di flesso per $\sin x = -\cos x$, cioè $x = -\pi/4 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin della funzione $t \mapsto \sin t$, ovvero

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} + o(t^{10}) \qquad \text{per } t \to 0\,,$$

e tenendo conto che, dalle formule trigonometriche si ha

$$\cos x = \cos(x - \pi/2 + \pi/2) = \cos(x - \pi/2)\cos(\pi/2) - \sin(x - \pi/2)\sin(\pi/2) = -\sin(x - \pi/2)\,,$$

ponendo $t = x - \frac{\pi}{2}$ nello sviluppo precedente, otteniamo

$$\cos x = -\sin\left[\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right] = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{6} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^7}{7!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^9}{9!} + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{10}\right).$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - (\alpha - 2)\lambda - 2\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \alpha; -2$. Quindi,

- per $\alpha \neq -2; 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}$ e $y_p''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $4A - (\alpha - 2)2A - 2\alpha A = 1$, da cui $A = \frac{1}{8-4\alpha}$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{\alpha x} + \frac{1}{8-4\alpha} e^{2x}$;
- per $\alpha = -2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 x \mathrm{e}^{-2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, come nel caso precedente otteniamo che una soluzione particolare sarà $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$ con $A = 1/16$; quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{1}{16} e^{2x}$;
- per $\alpha = 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{2x}(2x+1)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{2x}(4x+4)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $A\mathrm{e}^{2x}(4x+4) - 4Ax\mathrm{e}^{2x} = 1$, da cui $A = 1/4$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{4} x e^{2x}$.

Esercizio 4

Osserviamo che, per $-2 < \alpha < 0$, si ha che $f \in \mathcal{C}^0([\alpha, 0])$, quindi l'integrale proposto esiste finito. Per $\alpha \leq -2$, dobbiamo studiare il comportamento della funzione per $x \to -2$. In tal caso si ha

- per $\alpha = -2$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{x+2}}{x+2} = \frac{1}{(x+2)^{3/4}} \qquad \text{che converge poiché } 3/4 < 1;$$
- per $\alpha < -2$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{-2-\alpha}}{|x+2|^{3+\alpha}} \qquad \text{che converge per } 3 + \alpha < 1, \text{ ovvero } \alpha < -2.$$

In conclusione, l'integrale proposto converge per ogni $\alpha < 0$.

Esercizio 5

a) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = \frac{\lim_{x\to 0^+} f(x)}{\lim_{x\to 0^+} f(-x)} = \frac{-1}{\lim_{t\to 0^-} f(t)} = \frac{-1}{+1} = -1\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} g_1(x) = \frac{\lim_{x\to 0^-} f(x)}{\lim_{x\to 0^-} f(-x)} = \frac{+1}{\lim_{t\to 0^+} f(t)} = \frac{+1}{-1} = -1\,,$$

dove abbiamo effettuato la sostituzione $t = -x$, si ottiene che g_1 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

b) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{|-1|} = 1\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} g_2(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|f(x)|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|+1|} = 1\,,$$

si ottiene che g_2 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

c) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_3(x) = \lim_{x\to 0^+} [f(x) + \operatorname{sign}(x)] = \lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sign}(x) = -1 + 1 = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} g_3(x) = \lim_{x\to 0^-} [f(x) + \operatorname{sign}(x)] = \lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sign}(x) = +1 - 1 = 0\,,$$

si ottiene che g_3 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

d) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_4(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} + f(x)\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1 - 1 = 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^-} g_4(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{\sin x}{x} + f(x)\right] = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 + 1 = 2\,,$$

si ottiene che g_4 ha in $x = 0$ una discontinuità di salto.

TEMA C

Esercizio 1
Poiché

$$f'(x) = \sin x - \cos x + 2 = (1 - \cos x) + (1 + \sin x) \geq 0\,,$$
$$f''(x) = \cos x + \sin x\,,$$

si ottiene subito che f è monotona non decrescente in tutto $\mathbb{R}$ e avrà dei punti di flesso per $\sin x = -\cos x$, cioè $x = -\pi/4 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2
Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin della funzione $t \mapsto \sin t$, ovvero

$$\sin t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} + o(t^{10}) \qquad \text{per } t \to 0\,,$$

e tenendo conto che, dalle formule trigonometriche si ha

$$\cos x = \cos(x - 7\pi/2 + 7\pi/2) = \cos(x - 7\pi/2)\cos(7\pi/2) - \sin(x - 7\pi/2)\sin(7\pi/2) = \sin(x - 7\pi/2)\,,$$

ponendo $t = x - \frac{7}{2}\pi$ nello sviluppo precedente, otteniamo

$$\cos x = \sin\left[\left(x - \frac{7}{2}\pi\right)\right] = \left(x - \frac{7}{2}\pi\right) - \frac{\left(x - \frac{7}{2}\pi\right)^3}{6} + \frac{\left(x - \frac{7}{2}\pi\right)^5}{5!} - \frac{\left(x - \frac{7}{2}\pi\right)^7}{7!} + \frac{\left(x - \frac{7}{2}\pi\right)^9}{9!} + o\left(\left(x - \frac{7}{2}\pi\right)^{10}\right).$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - (\alpha - 3)\lambda - 3\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \alpha; -3$. Quindi,

- per $\alpha \neq -3; 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = 2A\mathrm{e}^{2x}$ e $y_p''(x) = 4A\mathrm{e}^{2x}$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $4A - (\alpha - 3)2A - 3\alpha A = 1$, da cui $A = \frac{1}{10 - 5\alpha}$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{\alpha x} + \frac{1}{10-5\alpha} e^{2x}$;
- per $\alpha = -3$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 x \mathrm{e}^{-3x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, come nel caso precedente otteniamo che una soluzione particolare sarà $y_p(x) = A\mathrm{e}^{2x}$ con $A = 1/25$; quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x} + \frac{1}{25} e^{2x}$;
- per $\alpha = 2$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{2x}(2x+1)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{2x}(4x+4)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $A\mathrm{e}^{2x}(4x+4) + A\mathrm{e}^{2x}(2x+1) - 6Ax\mathrm{e}^{2x} = 1$, da cui $A = 1/5$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} + \frac{1}{5} x e^{2x}$.

Esercizio 4
Osserviamo che, per $-1 < \alpha < 0$, si ha che $f \in \mathcal{C}^0([\alpha, 0])$, quindi l'integrale proposto esiste finito. Per $\alpha \leq -1$, dobbiamo studiare il comportamento della funzione per $x \to -1$. In tal caso si ha

- per $\alpha = -1$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{x+1}}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^{3/4}} \qquad \text{che converge poiché } 3/4 < 1;$$
- per $\alpha < -1$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt[4]{-1-\alpha}}{|x+1|^{2+\alpha}} \qquad \text{che converge per } 2 + \alpha < 1, \text{ ovvero } \alpha < -1.$$

In conclusione, l'integrale proposto converge per ogni $\alpha < 0$.

Esercizio 5

a) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = \frac{\lim_{x\to 0^+} f(x)}{\lim_{x\to 0^+} f(-x)} = \frac{-1}{\lim_{t\to 0^-} f(t)} = \frac{-1}{+1} = -1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_1(x) = \frac{\lim_{x\to 0^-} f(x)}{\lim_{x\to 0^-} f(-x)} = \frac{+1}{\lim_{t\to 0^+} f(t)} = \frac{+1}{-1} = -1\,,$$

dove abbiamo effettuato la sostituzione $t = -x$, si ottiene che g_1 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

b) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{|f(x)|} = \frac{1}{|-1|} = 1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_2(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|f(x)|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{|+1|} = 1\,,$$

si ottiene che g_2 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

c) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_3(x) = \lim_{x\to 0^+} [f(x) + \mathrm{sign}(x)] = \lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^+} \mathrm{sign}(x) = -1 + 1 = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_3(x) = \lim_{x\to 0^-} [f(x) + \mathrm{sign}(x)] = \lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^-} \mathrm{sign}(x) = +1 - 1 = 0\,,$$

si ottiene che g_3 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

d) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_4(x) = \lim_{x\to 0^+} \left[\frac{\sin x}{x} + f(x)\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0^+} f(x) = +1 - 1 = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_4(x) = \lim_{x\to 0^-} \left[\frac{\sin x}{x} + f(x)\right] = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} + \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1 + 1 = 2\,,$$

si ottiene che g_4 ha in $x = 0$ una discontinuità di salto.

TEMA D

Esercizio 1

Poiché

$$f'(x) = 2\sin x + 2\cos x - 4 = -2(1-\cos x) - 2(1-\sin x) \le 0\,,$$
$$f''(x) = 2\cos x - 2\sin x\,,$$

si ottiene subito che f è monotona non crescente in tutto $\mathbb{R}$ e avrà dei punti di flesso per $\sin x = \cos x$, cioè $x = \pi/4 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2

Ricordando lo sviluppo di Mc Laurin della funzione $t \mapsto \cos t$, ovvero

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \frac{t^8}{8!} + o(t^9) \qquad \text{per } t \to 0\,,$$

e tenendo conto che, dalle formule trigonometriche si ha

$$\sin x = \sin(x - 5\pi/2 + 5\pi/2) = \sin(x-5\pi/2)\cos(5\pi/2) + \cos(x-5\pi/2)\sin(5\pi/2) = \cos(x-5\pi/2)\,,$$

ponendo $t = x - \frac{5}{2}\pi$ nello sviluppo precedente, otteniamo

$$\sin x = \cos\left[\left(x - \frac{5}{2}\pi\right)\right] = 1 - \frac{\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)^2}{2} + \frac{\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)^4}{4!} - \frac{\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)^6}{6!} + \frac{\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)^8}{8!} + o\left(\left(x - \frac{5}{2}\pi\right)^9\right).$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - (3+\alpha)\lambda + 3\alpha = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \alpha; 3$. Quindi,

- per $\alpha \neq 1; 3$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{3x} + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = y_p''(x) = A\mathrm{e}^x$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $A\mathrm{e}^x - (3+\alpha)A\mathrm{e}^x + 3\alpha A\mathrm{e}^x = 1$ da cui $A = \frac{1}{2\alpha-2}$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{\alpha x} + \frac{1}{2\alpha-2}e^x$;
- per $\alpha = 3$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2 x\mathrm{e}^{3x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, come nel caso precedente otteniamo che una soluzione particolare sarà $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$ con $A = 1/4$; quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} + \frac{1}{4}e^x$;
- per $\alpha = 1$, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2\mathrm{e}^x$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^x(x+1)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^x(x+2)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava $A\mathrm{e}^x(x+2) - 4A\mathrm{e}^x(x+1) + 3Ax\mathrm{e}^x = 1$, da cui $A = -1/2$ e quindi l'integrale generale è $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^x - \frac{1}{2}xe^x$.

Esercizio 4

Osserviamo che, per $0 < \alpha < 2$, si ha che $f \in \mathcal{C}^0([0,\alpha])$, quindi l'integrale proposto esiste finito. Per $\alpha \ge 2$, dobbiamo studiare il comportamento della funzione per $x \to 2$. In tal caso si ha

- per $\alpha = 2$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt{2-x}}{2-x} = \frac{1}{(2-x)^{1/2}} \qquad \text{che converge poiché } 1/2 < 1;$$
- per $\alpha > 2$
$$f(x) \sim \frac{\sqrt{\alpha-2}}{|2-x|^{3-\alpha}} \qquad \text{che converge per } 3-\alpha < 1, \text{ ovvero } \alpha > 2.$$

In conclusione, l'integrale proposto converge per ogni $\alpha > 0$.

Esercizio 5

a) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_1(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) + \lim_{x\to 0^+} f(-x) = -1 + \lim_{t\to 0^-} f(t) = -1 + 1 = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_1(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) + \lim_{x\to 0^-} f(-x) = 1 + \lim_{t\to 0^+} f(t) = 1 - 1 = 0\,,$$

dove abbiamo effettuato la sostituzione $t = -x$, si ottiene che g_1 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

b) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_2(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|f(x)|} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|-1|}(-1) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_2(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|f(x)|} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{|1|}(1) = 0\,,$$

si ottiene che g_2 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.

c) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_3(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = -1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_3(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 1\,,$$

si ottiene che g_3 ha in $x = 0$ una discontinuità di salto.

d) Poiché

$$\lim_{x\to 0^+} g_4(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x)\mathrm{sign}[f(x)] = \lim_{x\to 0^+} |f(x)| = +1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} g_4(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)\mathrm{sign}[f(x)] = \lim_{x\to 0^-} |f(x)| = +1\,,$$

si ottiene che g_4 ha in $x = 0$ una discontinuità eliminabile.