SOLUZIONI COMPITO del 05/06/2009
ELETTRICA 5 CFU

Esercizio 1
Effettuando il cambiamento di variabile $t = \sin\sqrt{x}$, da cui $t(0) = 0$, $t(\pi^2/4) = 1$, $dt = \frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\,dx$, si ottiene

$$\int_0^{\pi^2/4} \frac{(\sin^3\sqrt{x})(\cos\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_0^1 t^3\,dt = 2\,\frac{t^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\,.$$

Esercizio 2
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata all'equazione differenziale è $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1, 5$. Quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è dato da

$$y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{5x}\,.$$

Dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare è della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-x}$ ove, sostituendo nell'equazione, si ottiene $Ax\mathrm{e}^{-x} - 2A\mathrm{e}^{-x} + 4Ax\mathrm{e}^{-x} - 4A\mathrm{e}^{-x} - 5Ax\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}$, cioè $A = -1/6$. La soluzione generale dell'equazione completa, pertanto, è data da

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{5x} - \frac{1}{6}x\mathrm{e}^{-x}\,,$$

Imponendo, ora, le condizioni iniziali si ottiene il sistema

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = -C_1 + 5C_2 - 1/6 = -1/6 \end{cases} \implies \begin{cases} C_1 + C_2 = 0 \\ -C_1 + 5C_2 = 0 \end{cases} \implies C_1 = C_2 = 0\,.$$

La soluzione cercata sarà data, quindi, dalla funzione $y(x) = -\frac{1}{6}\,x\mathrm{e}^{-x}$.

Esercizio 3
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = 2/n$, si ottiene

$$\log^2\left(1 + \frac{\alpha}{n}\right) = \left[\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right]^2 = \left(\frac{2}{n}\right)^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\,.$$

Quindi possiamo riscrivere

$$a_n := n^2\left[\log^2\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{n^2}\right] \sim n^2\left[\frac{4}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right] = n^2\,\frac{3}{n^2} \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3\,.$$

Esercizio 4
Innanzitutto osserviamo che $x^2 - x + 1 > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi la funzione proposta è ben definita su tutto l'asse reale; inoltre essa è continua sull'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$, quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluti. Iniziamo studiando gli estremanti locali di f, calcolandone la derivata e studiandone il segno in [0,1]. Tenendo conto di quanto appena osservato, si ottiene

$$f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}\begin{cases} > 0 & \text{per } 1/2 < x < 1, \\ = 0 & \text{per } x = 1/2, \\ < 0 & \text{per } 0 < x < 1/2. \end{cases}$$

Quindi, dal criterio di monotonia, si ricava che $x = 0$ e $x = 1$ sono punti di massimo locale per f, mentre $x = 1/2$ è punto di minimo locale per f. Essendoci un unico punto di minimo locale, esso è necessariamente anche il punto di minimo assoluto; per determinare invece il punto di massimo assoluto, valutiamo la funzione nei due punti di massimo locale. In questo modo si ottiene

$$f(1) = \log 1 = 0\,, \qquad f(0) = \log 1 = 0\,;$$

quindi entrambi risultano essere anche punti di massimo assoluto.