SOLUZIONI APPELLO del 05/06/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Ricordando che $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$ e $|z|^2 = a^2 + b^2$, otteniamo

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z^2)} > \mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{Im}(z) \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{a^2-b^2} > b\,\mathrm{e}^{-a^2-b^2} \\ \mathrm{e}^{a^2} > b\,\mathrm{e}^{-a^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2a^2} > b\,. \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni della disequzione proposta sono tutti i numeri complessi che si trovano sotto il grafico della funzione pari $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2}$.

Esercizio 2

Ricordando che $\sinh\left(\frac{2}{n^4+1}\right) \sim \left(\frac{2}{n^4+1}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{n^4+1}\right)^3$ e che $\sinh\left(\frac{3}{n^4+1}\right) \sim \left(\frac{3}{n^4+1}\right)$, otteniamo

$$\frac{\left[\sinh\left(\frac{2}{n^4+1}\right) - \frac{2}{n^{4\alpha}+1}\right]}{\sinh\left(\frac{3}{n^4+1}\right)} \sim \frac{\frac{2}{n^4+1} + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{n^4+1}\right)^3 - \frac{2}{n^{4\alpha}+1}}{\frac{3}{n^4+1}}$$

$$\sim \begin{cases} \frac{\frac{2}{n^4+1} - \frac{2}{n^{4\alpha}+1}}{\frac{3}{n^4+1}} \sim \frac{\frac{2}{n^4+1}}{\frac{3}{n^4+1}} = \frac{2}{3} & \text{se } \alpha > 1, \\ \frac{\frac{2}{n^4+1} - \frac{2}{n^{4\alpha}+1}}{\frac{3}{n^4+1}} \sim -\frac{\frac{2}{n^{4\alpha}+1}}{\frac{3}{n^4+1}} \sim -\frac{2n^{4(1-\alpha)}}{3} \to -\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1, \\ \frac{\frac{1}{6}\left(\frac{2}{n^4+1}\right)^3}{\frac{3}{n^4+1}} \sim \frac{4n^4}{9n^{12}} = \frac{4}{9n^8} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha = 1$, la serie proposta converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $8 > 1$, mentre per $\alpha \neq 1$ la serie diverge poiché il termine generale non soddisfa la condizione necessaria.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari, che può essere riscritta nella forma

$$\sqrt{2}\,\frac{y'(x)}{y^2(x)+2} = -\frac{\pi x + 1}{8x}$$

Procedendo per separazione, otteniamo

$$\arctan\frac{y(x)}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\int\frac{dy}{y^2+2} = -\frac{1}{8}\int\frac{\pi x+1}{x}\,dx = -\frac{1}{8}(\pi x + \log x) + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\left(\frac{y(1)}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\pi}{8} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{3\pi}{8}\,.$$

Ricavando ora esplicitamente $y(x)$ ed inserendo il valore della costante appena trovato si ha

$$\frac{y(x)}{\sqrt{2}} = -\tan\left(\frac{\pi x + \log x - 3\pi}{8}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = -\sqrt{2}\tan\left(\frac{\pi x + \log x - 3\pi}{8}\right)\,,$$

dove abbiamo tenuto conto anche del fatto che la funzione $s \mapsto \tan s$ è dispari.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è certamente continua su $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-1; -4\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili. Cominciamo, quindi, a studiare f per $x \to -1$; otteniamo

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{\log[1+(1+x)] - x - 1}{9(1+x)^2} = \lim_{x\to -1^+} \frac{1 + x - \frac{(1+x)^2}{2} - x - 1}{9(1+x)^2} = -\frac{1}{18}\,,$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \sqrt[3]{x+4}\,\sin|\pi - x| = \sqrt[3]{3}\,\sin(\pi + 1)\,.$$

Pertanto, il punto $x = -1$ è punto di salto. Inoltre abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\left[\frac{1}{2+x} - 1\right](1+x)^2 - 2(1+x)[\log(2+x) - x - 1]}{9(1+x)^4} & \text{per } x > -1; \\[2ex] \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}\,\sin(\pi - x) - \sqrt[3]{x+4}\,\cos(\pi - x) & \text{per } x < -4 \text{ e } -4 < x < -1; \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to -4^\pm} f'(x) = \lim_{x\to -4^\pm} \left[\frac{1}{3\sqrt[3]{(x+4)^2}}\,\sin(\pi - x) - \sqrt[3]{x+4}\cos(\pi - x)\right] = +\infty\,.$$

Pertanto, $x = -4$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 5

Le affermazioni A) e C) sono false. Infatti, basta prendere $a_n = 1/\sqrt{n}$ e $b_n = 1/\sqrt[4]{n}$; ovviamente, $a_n = o(b_n)$, poiché $a_n/b_n = \sqrt[4]{n}/\sqrt{n} = 1/\sqrt[4]{n} \to 0$, ma $\sum a_n b_n = \sum 1/n^{3/4} = +\infty$ e $\sum a_n/b_n = \sum 1/\sqrt[4]{n} = +\infty$.

Anche l'affermazione D) è falsa. Infatti, basta prendere $a_n = 1/n^4$ e $b_n = 1/n$; ovviamente, $a_n = o(b_n)$, poiché $a_n/b_n = n/n^4 = 1/n^3 \to 0$, ma $\sum \frac{a_n b_n}{a_n + b_n} = \sum \frac{1/n^5}{1/n} = \sum 1/n^4 < +\infty$.

L'unica affermazione corretta è la B), poiché se $a_n = o(b_n)$, cioè $a_n/b_n \to 0$, allora $b_n/a_n \to +\infty$ e quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, $\sum b_n/a_n = +\infty$.

TEMA B

Esercizio 1

Ricordando che $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$ e $|z|^2 = a^2 + b^2$, otteniamo

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z^2)} > \mathrm{e}^{|z|^2}\mathrm{Im}(z) \iff \mathrm{e}^{-a^2+b^2} > b\,\mathrm{e}^{a^2+b^2} \\ &\mathrm{e}^{-a^2} > b\,\mathrm{e}^{a^2} \iff \mathrm{e}^{-2a^2} > b\,. \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni della disequzione proposta sono tutti i numeri complessi che si trovano sotto il grafico della funzione pari $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$.

Esercizio 2

Ricordando che $\sinh\left(\frac{3}{n^3+3}\right) \sim \left(\frac{3}{n^3+3}\right) + \frac{1}{6}\left(\frac{3}{n^3+3}\right)^3$ e che $\sinh\left(\frac{1}{n^3+3}\right) \sim \left(\frac{1}{n^3+3}\right)$, otteniamo

$$\frac{\left[\frac{3}{n^{3\alpha}+3} - \sinh\left(\frac{3}{n^3+3}\right)\right]}{\sinh\left(\frac{1}{n^3+3}\right)} \sim \frac{\frac{3}{n^{3\alpha}+3} - \frac{3}{n^3+3} - \frac{1}{6}\left(\frac{3}{n^3+3}\right)^3}{\frac{1}{n^3+3}}$$

$$\sim \begin{cases} \frac{\frac{3}{n^{3\alpha}+3} - \frac{3}{n^3+3}}{\frac{1}{n^3+3}} \sim -\frac{\frac{3}{n^3+3}}{\frac{1}{n^3+3}} = -3 & \text{se } \alpha > 1, \\ \frac{\frac{3}{n^{3\alpha}+3} - \frac{3}{n^3+3}}{\frac{1}{n^3+3}} \sim \frac{\frac{3}{n^{3\alpha}+3}}{\frac{1}{n^3+3}} \sim 3n^{3(1-\alpha)} \to +\infty & \text{se } \alpha < 1, \\ -\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{3}{n^3+3}\right)^3}{\frac{1}{n^3+3}} \sim -\frac{27n^3}{6n^9} = -\frac{9}{2n^6} & \text{se } \alpha = 1. \end{cases}$$

Pertanto, per $\alpha = 1$, la serie proposta converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $6 > 1$, mentre per $\alpha \neq 1$ la serie diverge poiché il termine generale non soddisfa la condizione necessaria.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari, che può essere riscritta nella forma

$$2\,\frac{y'(x)}{y^2(x)+4} = \frac{\pi x + 1}{2x}$$

Procedendo per separazione, otteniamo

$$\arctan\frac{y(x)}{2} = 2\int \frac{dy}{y^2+4} = \frac{1}{2}\int \frac{\pi x + 1}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,(\pi x + \log x) + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\left(\frac{y(1)}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Ricavando ora esplicitamente $y(x)$ ed inserendo il valore della costante appena trovato si ha

$$\frac{y(x)}{2} = \tan\left(\frac{\pi x + \log x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 2\tan\left(\frac{\pi x + \log x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\,.$$

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è certamente continua su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{0;1\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili. Cominciamo, quindi, a studiare f per $x \to 0$; otteniamo

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sinh|x-1|}{\sqrt{x+1}} = \sinh 1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\mathrm{e}^{-4x}-4x}{(x^2-2x)^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1-1+4x-8x^2-4x}{x^3(x-2)^3} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-8x^2}{-8x^3} = -\infty\,.$$

Pertanto, il punto $x = 0$ è punto di infinito. Inoltre abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{x+1}\cosh(1-x) - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\sinh(1-x)}{x+1} & \text{per } 0 < x < 1; \\ \dfrac{\sqrt{x+1}\cosh(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\sinh(x-1)}{x+1} & \text{per } x > 1; \\ \dfrac{(4\mathrm{e}^{-4x}-4)(x^2-2x)^3 - 3(1-\mathrm{e}^{-4x}-4x)(x^2-2x)^2(2x-2)}{(x^2-2x)^6} & \text{per } x < 0; \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \left[\frac{-\sqrt{x+1}\cosh(1-x) - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\sinh(1-x)}{x+1}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,,$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\sqrt{x+1}\cosh(x-1) - \frac{1}{2\sqrt{x+1}}\sinh(x-1)}{x+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,.$$

Pertanto, $x = 1$ è un punto angoloso.

Esercizio 5

Le affermazioni B) e D) sono false. Infatti, basta prendere $a_n = 1/\sqrt[4]{n}$ e $b_n = 1/\sqrt{n}$; ovviamente, $b_n = o(a_n)$, poiché $b_n/a_n = \sqrt[4]{n}/\sqrt{n} = 1/\sqrt[4]{n} \to 0$, ma $\sum b_n/a_n = \sum 1/\sqrt[4]{n} = +\infty$ e $\sum \frac{a_n b_n}{a_n+b_n} = \sum \frac{1/n^{3/4}}{1/\sqrt[4]{n}} = \sum 1/\sqrt{n} = +\infty$.

Anche l'affermazione A) è falsa. Infatti, basta prendere $b_n = 1/n^4$ e $a_n = 1/n$; ovviamente, $b_n = o(a_n)$, poiché $b_n/a_n = n/n^4 = 1/n^3 \to 0$, ma $\sum a_n b_n = \sum 1/n^5 < +\infty$.

L'unica affermazione corretta è la C), poiché se $b_n = o(a_n)$, cioè $b_n/a_n \to 0$, allora $a_n/b_n \to +\infty$ e quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, $\sum a_n/b_n = +\infty$.

TEMA C

Esercizio 1

Ricordando che $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$ e $|z|^2 = a^2 + b^2$, otteniamo

$$
\begin{aligned}
-\,\mathrm{e}^{-\mathrm{Re}(z^2)} > \mathrm{e}^{|z|^2}\,\mathrm{Im}(-z) \quad &\Longleftrightarrow \quad -\mathrm{e}^{-a^2+b^2} > -b\,\mathrm{e}^{a^2+b^2} \\
\mathrm{e}^{-a^2} < b\,\mathrm{e}^{a^2} \quad &\Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-2a^2} < b\,.
\end{aligned}
$$

Quindi le soluzioni della disequzione proposta sono tutti i numeri complessi che si trovano sopra il grafico della funzione pari $f(x) = \mathrm{e}^{-2x^2}$.

Esercizio 2

Ricordando che $\sin\left(\frac{4}{n^3+4}\right) \sim \left(\frac{4}{n^3+4}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{n^3+4}\right)^3$ e che $\sin\left(\frac{1}{n^3+4}\right) \sim \left(\frac{1}{n^3+4}\right)$, otteniamo

$$
\frac{\left[\sin\left(\frac{4}{n^3+4}\right) - \frac{4}{n^{3\alpha}+4}\right]}{\sin\left(\frac{1}{n^3+4}\right)} \sim \frac{\frac{4}{n^3+4} - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{n^3+4}\right)^3 - \frac{4}{n^{3\alpha}+4}}{\frac{1}{n^3+4}}
$$

$$
\sim \begin{cases}
\dfrac{\frac{4}{n^3+4} - \frac{4}{n^{3\alpha}+4}}{\frac{1}{n^3+4}} \sim \dfrac{\frac{4}{n^3+4}}{\frac{1}{n^3+4}} = 4 & \text{se } \alpha > 1, \\[2ex]
\dfrac{\frac{4}{n^3+4} - \frac{4}{n^{3\alpha}+4}}{\frac{1}{n^3+4}} \sim -\dfrac{\frac{4}{n^{3\alpha}+4}}{\frac{1}{n^3+4}} \sim -4n^{3(1-\alpha)} \to -\infty & \text{se } \alpha < 1, \\[2ex]
-\dfrac{\frac{1}{6}\left(\frac{4}{n^3+4}\right)^3}{\frac{1}{n^3+4}} \sim -\dfrac{64n^3}{6n^9} = -\dfrac{32}{3n^6} & \text{se } \alpha = 1.
\end{cases}
$$

Pertanto, per $\alpha = 1$, la serie proposta converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $6 > 1$, mentre per $\alpha \neq 1$ la serie diverge poiché il termine generale non soddisfa la condizione necessaria.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari, che può essere riscritta nella forma

$$
3\,\frac{y'(x)}{y^2(x)+9} = \frac{\pi x + 1}{4x}
$$

Procedendo per separazione, otteniamo

$$
\arctan\frac{y(x)}{3} = 3\int \frac{dy}{y^2+9} = \frac{1}{4}\int \frac{\pi x + 1}{x}\,dx = \frac{1}{4}\left(\pi x + \log x\right) + C\,.
$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$
\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\left(\frac{y(1)}{3}\right) = \frac{\pi}{4} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = 0\,.
$$

Ricavando ora esplicitamente $y(x)$ ed inserendo il valore della costante appena trovato si ha

$$
\frac{y(x)}{3} = \tan\left(\frac{\pi x + \log x}{4}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = 3\tan\left(\frac{\pi x + \log x}{4}\right)\,.
$$

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è certamente continua su $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e derivabile su $\mathbb{R} \setminus \{-\pi; -2\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili. Cominciamo, quindi, a studiare f per $x \to -2$; otteniamo

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-2^-} f(x) &= \lim_{x\to-2^-} \frac{\sin|x+\pi|}{\sqrt{2-x}} = \frac{\sin(\pi-2)}{2}\,,\\
\lim_{x\to-2^+} f(x) &= \lim_{x\to-2^+} \frac{e^{2\sqrt{x+2}}-1-\sqrt{4x+8}}{(3x+6)^2} = \lim_{x\to-2^+} \frac{1+2\sqrt{x+2}+2(x+2)-1-2\sqrt{x+2}}{9(x+2)^2}\\
&= \lim_{x\to-2^+} \frac{2(x+2)}{9(x+2)^2} = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, il punto $x=-2$ è punto di infinito. Inoltre abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases}
\dfrac{-\sqrt{2-x}\cos(-x-\pi)+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\sin(-x-\pi)}{2-x} & \text{per } x<-\pi;\\[2ex]
\dfrac{\sqrt{2-x}\cos(x+\pi)+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\sin(x+\pi)}{2-x} & \text{per } -\pi<x<-2;\\[2ex]
\dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}}e^{2\sqrt{x+2}}-\frac{2}{\sqrt{4x+8}}\right)(3x+6)^2-6(e^{2\sqrt{x+2}}-1-\sqrt{4x+8})(3x+6)}{(3x+6)^4} & \text{per } x>-2;
\end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\pi^-} f'(x) &= \lim_{x\to-\pi^-}\left[\frac{-\sqrt{2-x}\cos(-x-\pi)+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\sin(-x-\pi)}{2-x}\right] = -\frac{1}{\sqrt{2+\pi}}\,,\\
\lim_{x\to-\pi^+} f'(x) &= \lim_{x\to-\pi^+}\frac{\sqrt{2-x}\cos(x+\pi)+\frac{1}{2\sqrt{2-x}}\sin(x+\pi)}{2-x} = \frac{1}{\sqrt{2+\pi}}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto, $x=-\pi$ è un punto angoloso.

Esercizio 5

Le affermazioni $A)$ e $B)$ sono false. Infatti, basta prendere $a_n = 1/\sqrt[4]{n}$ e $b_n = 1/\sqrt{n}$; ovviamente, $b_n = o(a_n)$, poiché $b_n/a_n = \sqrt[4]{n}/\sqrt{n} = 1/\sqrt[4]{n} \to 0$, ma $\sum b_n/a_n = \sum 1/\sqrt[4]{n} = +\infty$ e $\sum \frac{a_n b_n}{a_n+b_n} = \sum \frac{1/n^{3/4}}{1/\sqrt[4]{n}} = \sum 1/\sqrt{n} = +\infty$.

Anche l'affermazione $C)$ è falsa. Infatti, basta prendere $b_n = 1/n^4$ e $a_n = 1/n$; ovviamente, $b_n = o(a_n)$, poiché $b_n/a_n = n/n^4 = 1/n^3 \to 0$, ma $\sum a_n b_n = \sum 1/n^5 < +\infty$.

L'unica affermazione corretta è la $D)$, poiché se $b_n = o(a_n)$, cioè $b_n/a_n \to 0$, allora $a_n/b_n \to +\infty$ e quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, $\sum a_n/b_n = +\infty$.

TEMA D

Esercizio 1

Ricordando che $\mathrm{Re}(z^2) = a^2 - b^2$ e $|z|^2 = a^2 + b^2$, otteniamo

$$\begin{aligned}
&-\mathrm{e}^{\mathrm{Re}(z^2)} > \mathrm{e}^{-|z|^2}\mathrm{Im}(-z) \quad \Longleftrightarrow \quad -\mathrm{e}^{a^2-b^2} > -b\,\mathrm{e}^{-a^2-b^2} \\
&\mathrm{e}^{a^2} < b\,\mathrm{e}^{-a^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^{2a^2} < b\,.
\end{aligned}$$

Quindi le soluzioni della disequzione proposta sono tutti i numeri complessi che si trovano sopra il grafico della funzione pari $f(x) = \mathrm{e}^{2x^2}$.

Esercizio 2

Ricordando che $\sin\left(\frac{1}{n^4+2}\right) \sim \left(\frac{1}{n^4+2}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^4+2}\right)^3$ e che $\sin\left(\frac{2}{n^4+2}\right) \sim \left(\frac{2}{n^4+2}\right)$, otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{\left[\frac{1}{n^{4\alpha}+2} - \sin\left(\frac{1}{n^4+2}\right)\right]}{\sin\left(\frac{2}{n^4+2}\right)} &\sim \frac{\frac{1}{n^{4\alpha}+2} - \frac{1}{n^4+2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^4+2}\right)^3}{\frac{2}{n^4+2}} \\
&\sim \begin{cases}
\frac{\frac{1}{n^{4\alpha}+2} - \frac{1}{n^4+2}}{\frac{2}{n^4+2}} \sim -\frac{\frac{1}{n^4+2}}{\frac{2}{n^4+2}} = -\frac{1}{2} & \text{se } \alpha > 1, \\
\frac{\frac{1}{n^{4\alpha}+2} - \frac{1}{n^4+2}}{\frac{2}{n^4+2}} \sim \frac{\frac{1}{n^{4\alpha}+2}}{\frac{2}{n^4+2}} \sim \frac{n^{4(1-\alpha)}}{2} \to +\infty & \text{se } \alpha < 1, \\
\frac{\frac{1}{6}\left(\frac{1}{n^4+2}\right)^3}{\frac{2}{n^4+2}} \sim \frac{n^4}{12n^{12}} = \frac{1}{12n^8} & \text{se } \alpha = 1.
\end{cases}
\end{aligned}$$

Pertanto, per $\alpha = 1$, la serie proposta converge per confronto con la serie armonica generalizzata di esponente $8 > 1$, mentre per $\alpha \neq 1$ la serie diverge poiché il termine generale non soddisfa la condizione necessaria.

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che l'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine a variabili separabili, priva di soluzioni singolari, che può essere riscritta nella forma

$$\sqrt{3}\,\frac{y'(x)}{y^2(x)+3} = -\frac{\pi x + 2}{8x}$$

Procedendo per separazione, otteniamo

$$\arctan\frac{y(x)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\int \frac{dy}{y^2+3} = -\frac{1}{8}\int \frac{\pi x + 2}{x}\,dx = -\frac{1}{8}(\pi x + 2\log x) + C\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = \arctan\left(\frac{y(1)}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{8} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{3\pi}{8}\,.$$

Ricavando ora esplicitamente $y(x)$ ed inserendo il valore della costante appena trovato si ha

$$\frac{y(x)}{\sqrt{3}} = -\tan\left(\frac{\pi x + 2\log x - 3\pi}{8}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = -\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi x + 2\log x - 3\pi}{8}\right)\,,$$

dove abbiamo tenuto conto anche del fatto che la funzione $s \mapsto \tan s$ è dispari.

Esercizio 4

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è certamente continua su $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ e derivabile su $\mathbb{R}\setminus\{2;3\}$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue e derivabili. Cominciamo, quindi, a studiare f per $x \to 2$; otteniamo

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \sqrt[5]{x-3}\,\sinh|x-1| = \sqrt[5]{-1}\,\sinh 1 = -\sinh 1\,,$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{\log[1+(2-x)]-2+x}{4(2-x)^2} = \lim_{x\to 2^-} \frac{2-x-\frac{(2-x)^2}{2}-2+x}{4(2-x)^2} = -\frac{1}{8}\,.$$

Pertanto, il punto $x=2$ è punto di salto. Inoltre abbiamo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\left[-\frac{1}{3-x}+1\right](2-x)^2+2(2-x)[\log(3-x)-2+x]}{4(2-x)^4} & \text{per } x<2; \\[2ex] \dfrac{1}{5\sqrt[5]{(x-3)^4}}\,\sinh(x-1)+\sqrt[5]{x-3}\,\cosh(x-1) & \text{per } 2<x<3 \text{ e } x>3; \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\lim_{x\to 3^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \left[\frac{1}{5\sqrt[5]{(x-3)^4}}\,\sinh(x-1)+\sqrt[5]{x-3}\,\cosh(x-1)\right] = +\infty\,.$$

Pertanto, $x=3$ è un punto di flesso a tangente verticale.

Esercizio 5

Le affermazioni $A)$ e $B)$ sono false. Infatti, basta prendere $a_n = 1/\sqrt{n}$ e $b_n = 1/\sqrt[4]{n}$; ovviamente, $a_n = o(b_n)$, poiché $a_n/b_n = \sqrt[4]{n}/\sqrt{n} = 1/\sqrt[4]{n} \to 0$, ma $\sum a_n/b_n = \sum 1/\sqrt[4]{n} = +\infty$ e $\sum a_n b_n = \sum 1/n^{3/4} = +\infty$.

Anche l'affermazione $D)$ è falsa. Infatti, basta prendere $a_n = 1/n^4$ e $b_n = 1/n$; ovviamente, $a_n = o(b_n)$, poiché $a_n/b_n = n/n^4 = 1/n^3 \to 0$, ma $\sum \frac{a_n b_n}{a_n+b_n} = \sum \frac{1/n^5}{1/n} = \sum 1/n^4 < +\infty$.

L'unica affermazione corretta è la $C)$, poiché se $a_n = o(b_n)$, cioè $a_n/b_n \to 0$, allora $b_n/a_n \to +\infty$ e quindi, non essendo soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza, $\sum b_n/a_n = +\infty$.