SOLUZIONI COMPITO del 5/07/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Passando alla forma esponenziale, otteniamo

$$1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{-i\pi/3} \qquad \Longrightarrow \qquad (1-i\sqrt{3})^8 = 2^8\mathrm{e}^{-8\pi i/3}.$$

Pertanto, l'equazione proposta diventa

$$4z^3 = -2^8\mathrm{e}^{-8\pi i/3} = 2^8\mathrm{e}^{-8\pi i/3}\mathrm{e}^{i\pi} = 2^8\mathrm{e}^{-5\pi i/3} = 2^8\mathrm{e}^{i\pi/3} \qquad \Longrightarrow \qquad z^3 = 2^6\mathrm{e}^{i\pi/3}\,.$$

Da qui si ricava

$$z = \sqrt[3]{2^6\mathrm{e}^{i\pi/3}} = 4\mathrm{e}^{i(\pi/3+2k\pi)/3} = \begin{cases} 4\mathrm{e}^{i\pi/9}, \\ 4\mathrm{e}^{7\pi i/9}, \\ 4\mathrm{e}^{13\pi i/9}. \end{cases}$$

Esercizio 2

Tenendo conto che $\alpha > 0$ e ricordando che

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{con } x = \frac{2}{n^\alpha}\,,$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \text{con } x = \frac{1}{n}\,,$$

e che $\sqrt[3]{n^3+1} \sim n$, ricaviamo

$$\left[\log\left(1+\frac{2}{n^\alpha}\right) - 2\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right]\sqrt[3]{n^3+1} \sim \left[\left(\frac{2}{n^\alpha} - \frac{2}{n^{2\alpha}} + o(1/n^{2\alpha})\right) - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + o(1/n^3)\right)\right] n$$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{2}{n^\alpha}\,n = 2n^{1-\alpha} \to +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 1; \\ \left[\dfrac{2}{n} - \dfrac{2}{n^2} + o(1/n^2) - \dfrac{2}{n} + \dfrac{1}{3n^3} + o(1/n^3)\right] n = -\dfrac{2}{n^2}\,n = -\dfrac{2}{n} \to 0^- & \text{se } \alpha = 1; \\ -\dfrac{2}{n}\,n = -2 & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2 = 0$, che ha come soluzione $\lambda = -2$ con molteplicità $m = 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-2x} + C_2x\mathrm{e}^{-2x}$. Utilizzando il metodo di somiglianza e tenendo conto della molteplicità della soluzione dell'equazione caratteristica, ricaviamo che una soluzione particolare può essere scritta nella forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{-2x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-2x}(2x-2x^2)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-2x}(2-8x+4x^2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{-2x}(2-8x+4x^2) + 4A\mathrm{e}^{-2x}(2x-2x^2) + 4A\mathrm{e}^{-2x}x^2 = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad \Longrightarrow$$
$$2A - 8Ax + 4Ax^2 + 8Ax - 8Ax^2 + 4Ax^2 = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 + C_2x + x^2)$. Imponendo, infine, la condizione richiesta, ricaviamo

$$\lim_{x\to+\infty}[y(x)\mathrm{e}^{2x} - x^2 - 3] = \lim_{x\to+\infty}[C_1 + C_2x + x^2 - x^2 - 3] = \lim_{x\to+\infty}[(C_1-3) + C_2x] = 7 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_1 = 10 \text{ e } C_2 = 0\,.$$

Concludendo, il problema proposto ammette un'unica soluzione data $y(x) = \mathrm{e}^{-2x}(10+x^2)$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione di variabile $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $t(0) = 0$ e $t(4) = 2$, ed integrando successivamente per parti, si ricava

$$\begin{aligned}\int_0^4 \log(1+\sqrt{x})\,dx &= 2\int_0^2 t\log(1+t)\,dt = t^2\log(1+t)\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{t^2}{1+t}\,dt = 4\log 3 - \int_0^2 \frac{t^2+t-t}{1+t}\,dt \\ &= 4\log 3 - \int_0^2 t\,dt + \int_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}\,dt = 4\log 3 - \frac{t^2}{2}\Big|_0^2 + t\Big|_0^2 - \int_0^2 \frac{1}{1+t}\,dt \\ &= 4\log 3 - 2 + 2 - \log(1+t)\Big|_0^2 = 3\log 3 = \log(27)\,.\end{aligned}$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

ii) Dal teorema di derivazione della funzione composta e dal Teorema di Torricelli, otteniamo che $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; quindi, possiamo studiarne la concavità attraverso il segno della sua derivata seconda. Procedendo con i calcoli, otteniamo

$$F'(x) = x^3 f'(x^3)3x^2 = 3x^5 f'(x^3) \quad \text{e} \quad F''(x) = 15x^4 f'(x^3) + 3x^5 f''(x^3)3x^2 = 3x^4[5f'(x^3) + 3x^3 f''(x^3)].$$

Osservando che, per ipotesi, $f' \leq 0$ su tutto $\mathbb{R}$ (in quanto f è decrescente) e $x^3 f''(x^3) \leq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, otteniamo che $F'' \leq 0$ su tutto $\mathbb{R}$ (in quanto somma di due addendi non positivi, moltiplicata per il fattore $x^4 \geq 0$), ovvero la funzione F risulta essere concava.

TEMA B

Esercizio 1

Passando alla forma esponenziale, otteniamo

$$\sqrt{3}+i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 2\mathrm{e}^{i\pi/6} \qquad \Longrightarrow \qquad (\sqrt{3}+i)^5 = 2^5\mathrm{e}^{5\pi i/6}.$$

Pertanto, l'equazione proposta diventa

$$16z^3 = -2^5\mathrm{e}^{5\pi i/6} = 2^5\mathrm{e}^{5\pi i/6}\mathrm{e}^{i\pi} = 2^5\mathrm{e}^{11\pi i/6} = 2^5\mathrm{e}^{-i\pi/6} \qquad \Longrightarrow \qquad z^3 = 2\mathrm{e}^{-i\pi/6}\,.$$

Da qui si ricava

$$z = \sqrt[3]{2\mathrm{e}^{-i\pi/6}} = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{i(-\pi/6+2k\pi)/3} = \begin{cases} \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/18}, \\ \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{11\pi i/18}, \\ \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{23\pi i/18}. \end{cases}$$

Esercizio 2

Tenendo conto che $\alpha > 0$ e ricordando che

$$\begin{aligned} &\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \qquad \text{con } x = \frac{1}{2n}\,, \\ &\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) \qquad \text{con } x = \frac{1}{n^\alpha}\,, \end{aligned}$$

e che $\sqrt[4]{2+n^4} \sim n$, ricaviamo

$$\left[\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right]\sqrt[4]{2+n^4} \sim \left[\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}+o(1/n^2)\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{6n^{3\alpha}}+o(1/n^{3\alpha})\right)\right] n$$

$$\sim \begin{cases} -\dfrac{1}{2n^\alpha}\,n = -\dfrac{n^{1-\alpha}}{2} \to -\infty & \text{se } 0<\alpha<1; \\ \left[\dfrac{1}{2n}-\dfrac{1}{8n^2}+o(1/n^2)-\dfrac{1}{2n}+\dfrac{1}{12n^3}+o(1/n^3)\right] n = -\dfrac{1}{8n^2}\,n = -\dfrac{1}{8n} \to 0^- & \text{se } \alpha = 1; \\ \dfrac{1}{2n}\,n = \dfrac{1}{2} & \text{se } \alpha > 1. \end{cases}$$

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = (\lambda-3)^2 = 0$, che ha come soluzione $\lambda = 3$ con molteplicità $m = 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{3x} + C_2x\mathrm{e}^{3x}$. Utilizzando il metodo di somiglianza e tenendo conto della molteplicità della soluzione dell'equazione caratteristica, ricaviamo che una soluzione particolare può essere scritta nella forma $y_p(x) = Ax^2\varepsilon^{3x}$, da cui $y_p'(x) = A\varepsilon^{3x}(2x+3x^2)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{3x}(2+12x+9x^2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$\begin{aligned} &A\mathrm{e}^{3x}(2+12x+9x^2) - 6A\mathrm{e}^{3x}(2x+3x^2) + 9A\mathrm{e}^{3x}x^2 = -2\mathrm{e}^{3x} \qquad \Longrightarrow \\ &\qquad 2A + 12Ax + 9Ax^2 - 12Ax - 18Ax^2 + 9Ax^2 = -2 \qquad \Longrightarrow \qquad A = -1\,. \end{aligned}$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = \mathrm{e}^{3x}(C_1 + C_2x - x^2)$. Imponendo, infine, la condizione richiesta, ricaviamo

$$\lim_{x\to-\infty}[y(x)\mathrm{e}^{-3x}+x^2+2] = \lim_{x\to-\infty}[C_1+C_2x-x^2+x^2+2] = \lim_{x\to-\infty}[(C_1+2)+C_2x] = 8 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_1 = 6 \text{ e } C_2 = 0\,.$$

Concludendo, il problema proposto ammette un'unica soluzione data $y(x) = \mathrm{e}^{3x}(6-x^2)$.

Esercizio 4

Effettuando la sostituzione di variabile $t = \sqrt{x}$, da cui $x = t^2$, $dx = 2t\,dt$, $t(0) = 0$ e $t(3) = \sqrt{3}$, ed integrando successivamente per parti, si ricava

$$\int_0^3 2x \arctan(\sqrt{x})\,dx = 4\int_0^{\sqrt{3}} t^3 \arctan t\,dt = t^4 \arctan t\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^4}{1+t^2}\,dt$$
$$=9\arctan\sqrt{3} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^4+t^2-t^2}{1+t^2}\,dt = 9\,\frac{\pi}{3} - \int_0^{\sqrt{3}} t^2\,dt + \int_0^{\sqrt{3}} \frac{t^2+1-1}{1+t^2}\,dt$$
$$=3\pi - \frac{t^3}{3}\Big|_0^{\sqrt{3}} + t\Big|_0^{\sqrt{3}} - \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 3\pi - \frac{(\sqrt{3})^3}{3} + \sqrt{3} - \arctan t\Big|_0^{\sqrt{3}} = 3\pi - \arctan\sqrt{3} = \frac{8}{3}\,\pi\,.$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione, si veda il libro di testo.

ii) Dal teorema di derivazione della funzione composta e dal Teorema di Torricelli, otteniamo che $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$; quindi, possiamo studiarne la concavità attraverso il segno della sua derivata seconda. Procedendo con i calcoli, otteniamo

$$F'(x) = x^3 f'(x^3)3x^2 = 3x^5 f'(x^3) \quad \text{e} \quad F''(x) = 15x^4 f'(x^3) + 3x^5 f''(x^3)3x^2 = 3x^4[5f'(x^3) + 3x^3 f''(x^3)].$$

Osservando che, per ipotesi, $f' \leq 0$ su tutto $\mathbb{R}$ (in quanto f è decrescente) e $x^3 f''(x^3) \leq 0$, per ogni $x \in \mathbb{R}$, otteniamo che $F'' \leq 0$ su tutto $\mathbb{R}$ (in quanto somma di due addendi non positivi, moltiplicata per il fattore $x^4 \geq 0$), ovvero la funzione F risulta essere concava.