SOLUZIONI COMPITO del 5/09/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA

Esercizio 1

Tenendo che $\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\mathrm{e}^{i\pi/4}$, possiamo riscrivere z nel modo seguente:

$$z=\frac{4}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=\frac{4}{2\mathrm{e}^{i\pi/4}}=2\mathrm{e}^{-i\pi/4}=2[\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4)]\,.$$

Pertanto,

$$z^{11}=2^{11}\mathrm{e}^{-11i\pi/4}=2^{11}\mathrm{e}^{-3i\pi/4}=2^{11}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-2^{10}(\sqrt{2}+i\sqrt{2})\,.$$

Esercizio 2

Utilizzando la definizione e le proprietà del logaritmo, possiamo riscrivere

$$\left[1+\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{\frac{3n^3+1}{2n^2+3}}=\exp\left\{\log\left(\left[1+\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{\frac{3n^3+1}{2n^2+3}}\right)\right\}=\exp\left\{\frac{3n^3+1}{2n^2+3}\log\left[1+\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right]\right\}.$$

Inoltre, tenendo conto che per $n\to+\infty$, $2/n\to 0$, $\sin(2/n)\sim 2/n\to 0$ e $\log(1+t)\sim t$, per $t\to 0$, con $t=\sin(2/n)$, otteniamo

$$\frac{3n^3+1}{2n^2+3}\log\left[1+\sin\left(\frac{2}{n}\right)\right]\sim\frac{3n^3}{2n^2}\sin\left(\frac{2}{n}\right)\sim\frac{3}{2}\,n\,\frac{2}{n}=3.$$

Pertanto, il limite proposto sarà pari a e^3.

Esercizio 3

Osserviamo che, per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$, l'equazione proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea, la cui equazione caratteristica è $\lambda^2-4=0$, che ha per soluzioni $\lambda=\pm 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_o(x)=C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$, per ogni $\alpha\in\mathbb{R}$.
La soluzione particolare, invece, dipenderà dal parametro α. Per determinarla, utilizziamo il metodo di somiglianza.
Per $\alpha=0$, essa risulta essere costante e sarà data da $y_p(x)=-1/4$.
Per $\alpha\neq 0;\pm 2$, la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x)=A\mathrm{e}^{\alpha x}$, da cui $y_p'(x)=\alpha A\mathrm{e}^{\alpha x}$ e $y_p''(x)=\alpha^2A\mathrm{e}^{\alpha x}$; introducendo quanto trovato nell'equazione completa, otteniamo

$$\alpha^2A\mathrm{e}^{\alpha x}-4A\mathrm{e}^{\alpha x}=\mathrm{e}^{\alpha x}\,,$$

da cui $(\alpha^2-4)A=1$, ovvero $A=1/(\alpha^2-4)$.
Per $\alpha=2$, la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x)=Ax\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x)=A\mathrm{e}^{2x}+2Ax\mathrm{e}^{2x}$ e $y_p''(x)=4A\mathrm{e}^{2x}+4Ax\mathrm{e}^{2x}$; introducendo quanto trovato nell'equazione completa, otteniamo

$$4A\mathrm{e}^{2x}+4Ax\mathrm{e}^{2x}-4Ax\mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^{2x}\,,$$

da cui $4A=1$, ovvero $A=1/4$.
Per $\alpha=-2$, prendendo la soluzione particolare della forma $y_p(x)=Ax\mathrm{e}^{-2x}$ e ripetendo i medesimi calcoli appena effettuati, otteniamo $A=-1/4$.
Concludendo, si ricava

$$y(x)=\begin{cases} C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-1/4 & \text{se } \alpha=0,\\ C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{\alpha^2-4}\,\mathrm{e}^{\alpha x} & \text{se } \alpha\neq 0;\pm 2,\\ C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\frac{1}{4}\,x\mathrm{e}^{2x} & \text{se } \alpha=2,\\ C_1\mathrm{e}^{2x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}-\frac{1}{4}\,x\mathrm{e}^{-2x} & \text{se } \alpha=-2.\end{cases}$$

Esercizio 4

L'integrale proposto si può risolvere in vari modi. Noi procederemo effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x+2}$, da cui $x = t^2 - 2$, ovvero $dx = 2t\,dt$, $t(-2) = 0$, $t(7) = 3$. Quindi ricaviamo

$$\int_{-2}^{7} \sqrt{x+2}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x+2}}\,dx = 2\int_0^3 t^2\,\mathrm{e}^t\,dt = 2t^2\,\mathrm{e}^t\Big|_0^3 - 4\int_0^3 t\,\mathrm{e}^t\,dt = 18\mathrm{e}^3 - 4t\,\mathrm{e}^t\Big|_0^3 + 4\int_0^3 \mathrm{e}^t\,dt$$
$$= 18\mathrm{e}^3 - 12\mathrm{e}^3 + 4\mathrm{e}^t\Big|_0^3 = 6\mathrm{e}^3 + 4\mathrm{e}^3 - 4 = 10\mathrm{e}^3 - 4\,,$$

dove, nella seconda e nella terza uguaglianza abbiamo utilizzato un'integrazione per parti.

Esercizio 5

Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

a) L'affermazione è vera. Infatti, per il criterio della radice, si ricava

$$\sqrt[n]{a_n b_n} = \sqrt[n]{a_n}\,\sqrt[n]{b_n} = (1/3)(1/2) = \frac{1}{6} < 1\,.$$

Quindi, la serie proposta converge.

b) L'affermazione è falsa; basta considerare le successioni $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{(1/2)^n}{(1/3)^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \to +\infty \neq 0\,;$$

pertanto, la serie proposta non converge, in quanto non soddisfa la condizione necessaria.

c) L'affermazione è falsa; basta considerare, come nel punto *b*), le successioni $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$ e $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$. In tal caso, otteniamo

$$\frac{a_n^2}{b_n^3} = \frac{(1/9)^n}{(1/8)^n} = \left(\frac{8}{9}\right)^n\,,$$

che è il termine generale di una serie geometrica convergente, poiché di ragione < 1.

d) L'affermazione è vera. Infatti, per il criterio della radice, si ricava

$$\sqrt[n]{\frac{b_n^2}{a_n^3}} = \sqrt[n]{b_n^2}\,\frac{1}{\sqrt[n]{a_n^3}} = (1/4)\,\frac{1}{1/(27)} = \frac{27}{4} > 1\,.$$

Quindi, la serie proposta diverge.