SOLUZIONI APPELLO del 06/09/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA + ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = 2x$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 4x/3$, ricaviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x) - 2x\cos(4x/3)}{2x^3/9} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - 8x^3/6 - 2x[1 - 16x^2/(18)]}{2x^3/9} = \frac{4/9}{2/9} = 2\,.$$

Esercizio 2

Ricordiamo che l'equazione della retta tangente è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, con $x_0 = 1$ e $f(x_0) = 0$. Calcoliamo, pertanto,

$$f'(x_0) = f'(1) = \left(\mathrm{e}^x \sin(\log x) + \mathrm{e}^x \cos(\log x)\,\frac{1}{x}\right)\Big|_{x_0=1} = \mathrm{e}\,,$$

da cui si ricava l'equazione della retta richiesta è $y = \mathrm{e}(x-1)$.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è $(\lambda - 1)^2 = 0$. Pertanto, $\lambda = 1$ è soluzione con molteplicità pari a due, quindi l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x$. Dal metodo di somiglianza, tenendo conto della moltplicità di $\lambda = 1$, e dal principio di sovrapposizione, ricaviamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y'(x) = 2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x - B\mathrm{e}^{-x}$ e $y''(x) = 2A\mathrm{e}^x + 4Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x}$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo $2A\mathrm{e}^x + 4Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x} - 4Ax\mathrm{e}^x - 2Ax^2\mathrm{e}^x + 2B\mathrm{e}^{-x} + Ax^2\mathrm{e}^x + B\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}$, che fornisce $2A\mathrm{e}^x + 4B\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^x + 2\mathrm{e}^{-x}$, ovvero $A = 1$ e $B = 1/2$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2 x\mathrm{e}^x + x^2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}/2$. Imponendo, infine, le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 1/2 = y(0) = C_1 + 1/2\,, \\ -1/2 = y'(0) = C_1 + C_2 - 1/2\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2 = 0\,.$$

Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = x^2\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}/2$.

Esercizio 4

Ricordiamo che $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, da cui $z^3 = r^3\mathrm{e}^{i3\theta}$, $|z| = r$ e $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$. Pertanto, l'equazione proposta si riscrive nella forma $r^4\mathrm{e}^{3i\theta} = 8r\mathrm{e}^{i(\theta+\pi/2)}$, che porta alla soluzione $z = 0$, oppure al sistema

$$\begin{cases} r^3 = 8\,, \\ 3\theta = \theta + \pi/2 + 2k\pi\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} r = 2\,, \\ \theta = \pi/4 + k\pi\,. \end{cases}$$

Quindi, si ricavano tre soluzioni distinte date $z_0 = 0$, $z_1 = 2\mathrm{e}^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ e $z_3 = 2\mathrm{e}^{5i\pi/4} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
2. Effettuando il cambio di variabile $t = 1/x$, da cui $x = 1/t$, $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, $t(1) = 1$ e $t(0^+) = +\infty$, si ricava

$$\int_0^1 \sqrt{x[f(1/x)]^3}\,dx = -\int_{+\infty}^1 \sqrt{\frac{1}{t}[f(t)]^3}\,\frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{t^5}\,[f(t)]^3}\,dt$$

e

$$\sqrt{\frac{1}{t^5}\,[f(t)]^3} \sim \sqrt{\frac{1}{t^5}\,t^{3/2}} = \frac{1}{t^{7/4}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto risulta essere convergente per confronto asintotico con l'iperbole di esponente $7/4 > 1$.

TEMA B

Esercizio 1

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al terzo ordine per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = 3x$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cosh t$, con $t = 2x$, ricaviamo

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x\cosh(2x) - \sinh(3x)}{3x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{3x(1+2x^2) - (3x + 27x^3/6)}{3x^3} = \frac{3/2}{3} = 1/2\,.$$

Esercizio 2

Ricordiamo che l'equazione della retta tangente è data da $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, con $x_0 = 0$ e $f(x_0) = 0$. Calcoliamo, pertanto,

$$f'(x_0) = f'(0) = \left((\cos x)\log(\mathrm{e}^x + 1) + \frac{\mathrm{e}^x \sin x}{\mathrm{e}^x + 1} \right)\Big|_{x_0=0} = \log 2\,,$$

da cui si ricava che l'equazione della retta richiesta è $y = (\log 2)\, x$.

Esercizio 3

Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica é $(\lambda+1)^2 = 0$. Pertanto, $\lambda = -1$ è soluzione con molteplicità pari a due, quindi l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2 x\mathrm{e}^{-x}$. Dal metodo di somiglianza, tenendo conto della moltplicità di $\lambda = -1$, e dal principio di sovrapposizione, ricaviamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^x$, da cui $y'(x) = 2Ax\mathrm{e}^{-x} - Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^x$ e $y''(x) = 2A\mathrm{e}^{-x} - 4Ax\mathrm{e}^{-x} + Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^x$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo $2A\mathrm{e}^{-x} - 4Ax\mathrm{e}^{-x} + Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^x + 4Ax\mathrm{e}^{-x} - 2Ax^2\mathrm{e}^{-x} + 2B\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^x = 4\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{-x}$, che fornisce $2A\mathrm{e}^{-x} + 4B\mathrm{e}^x = 4\mathrm{e}^x + 4\mathrm{e}^{-x}$, ovvero $A = 2$ e $B = 1$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2x\mathrm{e}^{-x} + 2x^2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$. Imponendo, infine, le condizioni iniziali, otteniamo

$$\begin{cases} 1 = y(0) = C_1 + 1\,, \\ 1 = y'(0) = -C_1 + C_2 + 1\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad C_1 = C_2 = 0\,.$$

Pertanto, la soluzione del problema di Cauchy sarà $y(x) = 2x^2\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x$.

Esercizio 4

Ricordiamo che $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$, da cui $z^3 = r^3\mathrm{e}^{i3\theta}$, $|z| = r$ e $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$. Pertanto, l'equazione proposta si riscrive nella forma $8r^4\mathrm{e}^{i(3\theta+\pi/2)} = r\mathrm{e}^{i\theta}$, che porta alla soluzione $z = 0$, oppure al sistema

$$\begin{cases} 8r^3 = 1\,, \\ 3\theta + \pi/2 = \theta + 2k\pi\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} r = 1/2\,, \\ \theta = -\pi/4 + k\pi\,. \end{cases}$$

Quindi, si ricavano tre soluzioni distinte date $z_0 = 0$, $z_1 = (1/2)\mathrm{e}^{-i\pi/4} = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{i}{2\sqrt{2}}$ e $z_3 = (1/2)\mathrm{e}^{3i\pi/4} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{i}{2\sqrt{2}}$.

Esercizio 5

1. Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
2. Effettuando il cambio di variabile $t = 1/x$, da cui $x = 1/t$, $dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$, $t(1) = 1$ e $t(0^+) = +\infty$, si ricava

$$\int_0^1 \sqrt{x[f(1/x)]^3}\,dx = -\int_{+\infty}^1 \sqrt{\frac{1}{t}[f(t)]^3}\,\frac{1}{t^2}\,dt = \int_1^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{t^5}\,[f(t)]^3}\,dt$$

e

$$\sqrt{\frac{1}{t^5}\,[f(t)]^3} \sim \sqrt{\frac{1}{t^5}\,t^{3/2}} = \frac{1}{t^{7/4}}\,.$$

Pertanto, l'integrale proposto risulta essere convergente per confronto asintotico con l'iperbole di esponente $7/4 > 1$.