SOLUZIONI COMPITO del 7/06/2012
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini negativi quindi, a meno di raccogliere il segno, può essere ricondotta ad una serie a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \cos\frac{1}{n} - 1$, e quello al secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 1/n$, otteniamo

$$n^\alpha \log\left(\cos\frac{1}{n}\right) = n^\alpha \log\left(1 + \left[\cos\frac{1}{n} - 1\right]\right) \sim n^\alpha \left[\cos\frac{1}{n} - 1\right] \sim -n^\alpha \frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{2n^{2-\alpha}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge se e solo se $2-\alpha > 1$, ovvero per $\alpha < 1$. Per $\alpha \geq 1$, la serie proposta diverge a $-\infty$.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è sempre continua e non negativa nell'intervallo $(0,1]$; quindi il suo comportamento va studiato solo per $x \to 0^+$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = (\sinh x)^{2\alpha^2}$, per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = x^5$, e per la funzione $x \mapsto \sinh x$, otteniamo, per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{(\sinh x)^{2\alpha^2}\, x^{2\alpha}}{x^5} \sim \frac{x^{2\alpha^2}\, x^{2\alpha}}{x^5} = \frac{1}{x^{-2\alpha^2-2\alpha+5}}\,.$$

Dal criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri si ricava che l'integrale proposto esiste finito se e solo se $-2\alpha^2 - 2\alpha + 5 < 1$, ovvero $2\alpha^2 + 2\alpha - 4 > 0$, da cui $\alpha < -2$ e $\alpha > 1$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che può essere riscritta nella forma $y'(x) = \frac{x\arctan(3x)}{(y(x)+2)^2}$; ovvero essa risulta essere a variabili separabili e priva di soluzioni singolari. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{(y+2)^3}{3} &= \int (y+2)^2\,dy = \int x\arctan(3x)\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(3x) - \frac{1}{6}\int \frac{9x^2}{1+9x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(3x) - \frac{1}{6}\int \frac{1+9x^2-1}{1+9x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\arctan(3x) - \frac{x}{6} + \frac{1}{6}\int \frac{1}{1+9x^2}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan(3x) - \frac{x}{6} + \frac{1}{18}\arctan(3x) + C\,.
\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto all'incognita y, si ricava l'integrale generale

$$y(x) = -2 + \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}\arctan(3x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\arctan(3x) + C}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo $1 = y(0) = -2 + \sqrt[3]{C}$, che fornisce $C = 27$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = -2 + \sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}\arctan(3x) - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\arctan(3x) + 27}\,.$$

Esercizio 4

Studiamo, innanzitutto, gli estremanti della funzione f, utilizzando il Teorema di Fermat nell'intervallo $(0, \pi)$:

$$f'(x) = 1 - 2\cos x \begin{cases} > 0 & \text{se } \cos x < 1/2 \iff \pi/3 < x < \pi; \\ = 0 & \text{se } \cos x = 1/2 \iff x = \pi/3; \\ < 0 & \text{se } \cos x > 1/2 \iff 0 < x < \pi/3. \end{cases}$$

Quindi $x = 0$ e $x = \pi$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = \pi/3$ è punto di minimo relativo e assoluto. Calcolando $f(0) = 0$ ed $f(\pi) = \pi$, otteniamo anche che $x = \pi$ è punto di massimo assoluto. Inoltre, poiché $f(\pi/3) = \pi/3 - \sqrt{3}$, si ha anche che $f(x) + \sqrt{3} > 0$ in tutto l'intervallo $[0, \pi]$, quindi la funzione $g(x)$ coincide con la funzione $f(x) + \sqrt{3}$ nell'intervallo considerato. Pertanto, $x = 0$ è punto di massimo relativo per g, $x = \pi$ è punto di massimo assoluto per g e $x = \pi/3$ è punto di minimo assoluto per g.

Esercizio 5

a) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione $f(x) = 1$, che è continua e limitata su tutto $\mathbb{R}$.

b) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione di Dirichlet $f(x) = 1$ se $x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, che è limitata, ma non integrabile in senso proprio.

c) L'affermazione è vera per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.

d) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, nuovamente la funzione $f(x) = 1$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini positivi. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1$, e per la funzione $t \mapsto \mathrm{e}^t$, con $t = 1/n$, otteniamo

$$\frac{1}{n^\alpha} \log\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n^\alpha} \log\left(1 + \left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right]\right) \sim \frac{1}{n^\alpha}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} - 1\right] \sim \frac{1}{n^\alpha}\,\frac{1}{n} = \frac{1}{n^{\alpha+1}}\,.$$

Pertanto, per il criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge se e solo se $\alpha + 1 > 1$, ovvero per $\alpha > 0$. Per $\alpha \leq 0$, la serie proposta diverge a $+\infty$.

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è sempre continua e non negativa nell'intervallo $(0,1]$; quindi il suo comportamento va studiato solo per $x \to 0^+$. Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$, con $t = \sinh x^3$, per la funzione $t \mapsto (1+t)^{3/2}$, con $t = x^{2\alpha^2}$, e per la funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = x^3$, otteniamo, per $x \to 0^+$,

$$f(x) \sim \frac{\sinh x^3}{x^{2\alpha}\,\frac{3}{2} x^{2\alpha^2}} \sim \frac{2x^3}{3x^{2\alpha}\,x^{2\alpha^2}} = \frac{2}{3x^{2\alpha^2+2\alpha-3}}\,.$$

Dal criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri si ricava che l'integrale proposto esiste finito se e solo se $2\alpha^2 + 2\alpha - 3 < 1$, ovvero $2\alpha^2 + 2\alpha - 4 < 0$, da cui $-2 < \alpha < 1$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale che può essere riscritta nella forma $y'(x) = -\frac{x\log(1+x^2)}{(y(x)+1)^4}$; ovvero essa risulta essere a variabili separabili e priva di soluzioni singolari. Poiché il secondo membro soddisfa le ipotesi del teorema di esistenza ed unicità locale della soluzione per $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, avremo che la soluzione del problema proposto si ottiene per separazione di variabili. Otteniamo

$$\begin{aligned}
\frac{(y+1)^5}{5} &= \int (y+1)^4\,dy = -\int x\log(1+x^2)\,dx = -\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2 \cdot 2x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \int \frac{x(1+x^2-1)}{1+x^2}\,dx = -\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&= -\frac{x^2}{2}\log(1+x^2) + \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\log(1+x^2) + C\,.
\end{aligned}$$

Risolvendo rispetto all'incognita y, si ricava l'integrale generale

$$y(x) = -1 + \sqrt[5]{-\frac{5x^2}{2}\log(1+x^2) + \frac{5x^2}{2} - \frac{5}{2}\log(1+x^2) + C}\,.$$

Imponendo la condizione iniziale, otteniamo $1 = y(0) = -1 + \sqrt[5]{C}$, che fornisce $C = 32$. Quindi la soluzione richiesta è

$$y(x) = -1 + \sqrt[5]{-\frac{5x^2}{2}\log(1+x^2) + \frac{5x^2}{2} - \frac{5}{2}\log(1+x^2) + 32}\,.$$

Esercizio 4

Studiamo, innanzitutto, gli estremanti della funzione f, utilizzando il Teorema di Fermat nell'intervallo $(0,\pi)$:

$$f'(x) = \cos x - 1/2 \begin{cases} < 0 & \text{se } \cos x < 1/2 \iff \pi/3 < x < \pi; \\ = 0 & \text{se } \cos x = 1/2 \iff x = \pi/3; \\ > 0 & \text{se } \cos x > 1/2 \iff 0 < x < \pi/3. \end{cases}$$

Quindi $x = 0$ e $x = \pi$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = \pi/3$ è punto di massimo relativo e assoluto. Calcolando $f(0) = 0$ ed $f(\pi) = -\pi/2$, otteniamo anche che $x = \pi$ è punto di minimo assoluto. Inoltre, poiché $f(\pi/3) = \sqrt{3}/2 - \pi/3$, si ha anche che $f(x) - \sqrt{3}/2 < 0$ in tutto l'intervallo $[0,\pi]$, quindi la funzione $g(x)$ coincide con la funzione $\sqrt{3}/2 - f(x)$ nell'intervallo considerato. Pertanto, $x = 0$ è punto di massimo relativo per g, $x = \pi$ è punto di massimo assoluto per g e $x = \pi/3$ è punto di minimo assoluto per g.

Esercizio 5

a) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione $f(x) = 1$, che è continua e limitata su tutto $\mathbb{R}$.

b) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, nuovamente la funzione $f(x) = 1$.

c) L'affermazione è falsa, basta considerare, ad esempio, la funzione di Dirichlet $f(x) = 1$ se $x \in [0, 1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, che è limitata, ma non integrabile in senso proprio.

d) L'affermazione è vera per il Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale.