CALCOLO DIFF. e INT./A appello del 7 luglio 2008	cognome e nome (stampatello) firma

1. Determinare i numeri $z \in \mathbb{C}$ che verificano la condizione

$$|2z - 1| < |2 - \overline{z}|$$

e rappresentarli nel piano.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) - 10y'(x) + 50y(x) = 61\mathrm{e}^{-x} .$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare, qualora esistano, le soluzioni della precedente equazione differenziale che soddisfano le due condizioni

$$y(\pi) = \mathrm{e}^{-5\pi} \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 .$$

---

3. Calcolare

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\arctan(1 + \log x)}{x} \log x \, dx .$$

---

4. Determinare massimi e minimi relativi e punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = x^3 + 2y^3 + 3xy^2 - 12x .$$

---

5. Calcolare, al variare del parametro reale α , il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \arctan \left[\sin(\mathrm{e}^{-4n} + 6\pi)\right] 2^{\alpha n} .$$

---

6. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \sim 1/n$ e $b_n \sim n$. Stabilire per ognuna delle seguenti affermazioni se è corretta o meno, giustificando la risposta o fornendo un controesempio:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n b_n}$ converge; $\qquad$ $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{b_n}}{a_n}$ converge assolutamente;

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{a_n}}{b_n}$ diverge; $\qquad$ $d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n^{-2}$ converge.

Tempo:
3 ore

CALCOLO DIFF. e INT./B appello del 7 luglio 2008	cognome e nome (stampatello) firma

1. Determinare i numeri $z \in \mathbb{C}$ che verificano la condizione

$$|3z - 1| > |\overline{z} - 3|$$

e rappresentarli nel piano.

---

2. Si consideri l'equazione differenziale

$$y''(x) + 6y'(x) + 18y(x) = 50\mathrm{e}^x \,.$$

1. Determinare l'integrale generale.
2. Determinare, qualora esistano, le soluzioni della precedente equazione differenziale che soddisfano le due condizioni

$$y(0) = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to -\infty} y(x) = 0 \,.$$

---

3. Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\log(1 + \arctan x)}{1 + x^2} \arctan x \; dx \,.$$

---

4. Determinare massimi e minimi relativi e punti di sella della funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = 3xy^2 - 2x^3 - 2y^3 + 12x \,.$$

---

5. Calcolare, al variare del parametro reale α , il seguente limite

$$\lim_{n \to +\infty} \log\left[1 + \tan(2^{-3n} + 5\pi)\right] \mathrm{e}^{2\alpha n} \,.$$

---

6. Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni tali che $a_n \sim n$ e $b_n \sim 1/n$. Stabilire per ognuna delle seguenti affermazioni se è corretta o meno, giustificando la risposta o fornendo un controesempio:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n b_n}$ converge; *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{a_n} b_n^2$ converge assolutamente;

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{1/a_n} b_n$ converge; *d)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n^{-2}$ diverge.

Tempo: 3 ore