SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$, la disequazione proposta si riscrive nella forma

$$\sqrt{(2x-1)^2 + (2y)^2} < \sqrt{(2-x)^2 + y^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (2x-1)^2 + (2y)^2 < (2-x)^2 + y^2 \,.$$

Svolgendo i quadrati e semplificando, si ricava la condizione $x^2 + y^2 < 1$, che rappresenta la parte interna del cerchio di centro l'origine e raggio unitario.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 10\lambda + 50 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 5 \pm 5i$. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = \mathrm{e}^{5x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$. Poiché la funzione $g(x) = \mathrm{e}^{-x}$ non è soluzione dell'omogenea, applicando il metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Quindi l'integrale generale sarà dato da
$$y(x) = \mathrm{e}^{5x}(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x) + \mathrm{e}^{-x} \,.$$
2. Imponendo la condizione iniziale $y(\pi) = \mathrm{e}^{-5\pi}$ e la condizione al limite, si ottiene
$$\begin{cases} -C_1 \mathrm{e}^{5\pi} + \mathrm{e}^{-\pi} = \mathrm{e}^{-5\pi} \quad \Longrightarrow \quad C_1 = \mathrm{e}^{-6\pi} - \mathrm{e}^{-10\pi} \,, \\ \lim\limits_{x \to +\infty} [(C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)\mathrm{e}^{5x} + \mathrm{e}^{-x}] = 0 \quad \Longrightarrow \quad C_1 = C_2 = 0 \,. \end{cases}$$
Quindi non esiste alcuna soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente alle condizione richieste.

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento di variabile $t = \log x$, da cui $dt = \frac{1}{x}\, dx$, $t(1) = 0$, $t(\mathrm{e}) = 1$, si ricava

$$\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\arctan(1 + \log x)}{x} \log x \; dx = \int_0^1 t \arctan(1+t)\; dt = \frac{t^2}{2} \arctan(1+t)\Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{1 + (1+t)^2}\; dt$$
$$= \frac{\arctan 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2 + 2t + t^2 - 2 - 2t}{2 + 2t + t^2}\; dt = \frac{\arctan 2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 dt + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2 + 2t}{2 + 2t + t^2}\; dt$$
$$= \frac{\arctan 2}{2} - \frac{1}{2} t\Big|_0^1 + \frac{1}{2} \log(2 + 2t + t^2)\Big|_0^1 = \frac{\arctan 2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log(5/2) \,.$$

Esercizio 4

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per determinare i suoi estremanti ed i suoi punti di sella, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo determinando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3x^2 + 3y^2 - 12 = 0 \\ f_y(x,y) = 6y^2 + 6xy = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ y(y+x) = 0 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 4 \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} y = -x \\ 2x^2 = 4 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $P_1 = (2, 0)$, $P_2 = (-2, 0)$, $P_3 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ e $P_4 = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Tenendo conto che $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = 6y$ e $f_{yy} = 12y + 6x$, si ottiene

$$H_f(P_1) = \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0 \qquad H_f(P_2) = \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -12 \end{vmatrix} = 144 > 0$$

$$H_f(P_3) = \begin{vmatrix} 6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \\ -6\sqrt{2} & -6\sqrt{2} \end{vmatrix} = -144 < 0 \qquad H_f(P_4) = \begin{vmatrix} -6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \\ 6\sqrt{2} & 6\sqrt{2} \end{vmatrix} = -144 < 0$$

Quindi, P_1 è punto di minimo relativo, P_2 è punto di massimo relativo, mentre P_3 e P_4 sono punti di sella.

Esercizio 5

Innanzitutto osserviamo che la funzione $f(t) = \sin t$ è 2π-periodica, pertanto $\sin(\mathrm{e}^{-4n} + 6\pi) = \sin(\mathrm{e}^{-4n})$. Utilizzando poi lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \arctan t$, con $t = \sin(\mathrm{e}^{-4n})$, e per la funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \mathrm{e}^{-4n}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a_n &:= \arctan\big[\sin(\mathrm{e}^{-4n} + 6\pi)\big]\, 2^{\alpha n} = \arctan\big[\sin(\mathrm{e}^{-4n})\big]\, 2^{\alpha n} \\ &\sim \sin(\mathrm{e}^{-4n})\, 2^{\alpha n} \sim \mathrm{e}^{-4n}\, 2^{\alpha n} = \frac{\mathrm{e}^{\alpha n \log 2}}{\mathrm{e}^{4n}} = \mathrm{e}^{(\alpha \log 2 - 4)n}\,. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > 4/\log 2, \\ 1 & \text{se } \alpha = 4/\log 2, \\ 0 & \text{se } \alpha < 4/\log 2. \end{cases}$$

Esercizio 6

a) L'affermazione è errata poiché scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/n$ e $b_n = n$ si ottiene $a_n b_n = 1$, quindi il termine generale della serie proposta non è neppure infinitesimo.

b) L'affermazione è errata poiché scegliendo, ad esempio, $a_n = 1/n$ e $b_n = n$ si ottiene $|(-1)^{b_n}/a_n| = n$, quindi il termine generale della serie proposta non è neppure infinitesimo.

c) L'affermazione è corretta in quanto $2^{a_n}/b_n \sim 1/n$ e per confronto con la serie armonica, la serie proposta diverge.

d) L'affermazione è corretta in quanto $a_n b_n^{-2} \sim 1/n^3$ e per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge.

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Ponendo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, la disequazione proposta si riscrive nella forma

$$\sqrt{(3x-1)^2 + (3y)^2} > \sqrt{(x-3)^2 + y^2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (3x-1)^2 + (3y)^2 > (x-3)^2 + y^2\,.$$

Svolgendo i quadrati e semplificando, si ricava la condizione $x^2 + y^2 > 1$, che rappresenta la parte esterna del cerchio di centro l'origine e raggio unitario.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine non omogenea a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 6\lambda + 18 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -3 \pm 3i$. Pertanto, la soluzione dell'equazione omogenea associata è $y_0(x) = \mathrm{e}^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$. Poiché la funzione $g(x) = \mathrm{e}^x$ non è soluzione dell'omogenea, applicando il metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare è data da $y_p(x) = 2\mathrm{e}^x$. Quindi l'integrale generale sarà dato da

$$y(x) = \mathrm{e}^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + 2\mathrm{e}^x\,.$$

2. Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 2$ e la condizione al limite, si ottiene

$$\begin{cases} C_1 + 2 = 2 & \Longrightarrow \quad C_1 = 0\,, \\ \lim\limits_{x\to-\infty}(C_2\mathrm{e}^{-3x} \sin 3x + \mathrm{e}^x) = 0 & \Longrightarrow \quad C_2 = 0\,. \end{cases}$$

Quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente alle condizione richieste ed è data da $y(x) = 2\mathrm{e}^x$.

Esercizio 3

Effettuando un cambiamento di variabile $t = \arctan x$, da cui $dt = \frac{1}{1+x^2}\,dx$, $t(0) = 0$, $t(1) = \pi/4$, si ricava

$$\int_0^1 \frac{\log(1+\arctan x)}{1+x^2} \arctan x\; dx = \int_0^{\pi/4} t\,\log(1+t)\; dt = \frac{t^2}{2}\log(1+t)\Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{t^2}{1+t}\; dt$$

$$= \frac{\pi^2}{32}\log(1+\pi/4) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{t^2+2t+1-2t-1}{1+t}\; dt$$

$$= \frac{\pi^2}{32}\log(1+\pi/4) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} (t+1)\; dt + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{2t+1+1-1}{1+t}\; dt$$

$$= \frac{\pi^2}{32}\log(1+\pi/4) - \frac{1}{4}(t+1)^2\Big|_0^{\pi/4} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} dt - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{1+t}\; dt$$

$$= \frac{\pi^2}{32}\log(1+\pi/4) - \frac{1}{4}(\pi/4+1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log(1+t)\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{\pi^2}{32}\log(1+\pi/4) - \frac{1}{4}(\pi/4+1)^2 + \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\log(1+\pi/4)\,.$$

Esercizio 4

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, quindi per determinare i suoi estremanti ed i suoi punti di sella, possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Cominciamo determinando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 12 - 6x^2 + 3y^2 = 0 \\ f_y(x,y) = 6xy - 6y^2 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} -2x^2 + y^2 + 4 = 0 \\ y(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \qquad \text{oppure} \qquad \begin{cases} y = x \\ x^2 = 4 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $P_1 = (\sqrt{2}, 0)$, $P_2 = (-\sqrt{2}, 0)$, $P_3 = (2, 2)$ e $P_4 = (-2, -2)$. Tenendo conto che $f_{xx} = -12x$, $f_{xy} = 6y$ e $f_{yy} = -12y + 6x$, si ottiene

$$H_f(P_1) = \begin{vmatrix} -12\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 6\sqrt{2} \end{vmatrix} = -144 < 0 \quad H_f(P_2) = \begin{vmatrix} 12\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -6\sqrt{2} \end{vmatrix} = -144 < 0$$

$$H_f(P_3) = \begin{vmatrix} -24 & 12 \\ 12 & -12 \end{vmatrix} = 144 > 0 \qquad H_f(P_4) = \begin{vmatrix} 24 & -12 \\ -12 & 12 \end{vmatrix} = 144 > 0$$

Quindi, P_1 e P_2 sono punti di sella, P_3 è punto di massimo relativo e P_4 è punto di minimo relativo.

Esercizio 5

Innanzitutto osserviamo che la funzione $f(t) = \tan t$ è π-periodica, pertanto $\tan(2^{-3n} + 5\pi) = \tan(2^{-3n})$. Utilizzando poi lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1 + t)$, con $t = \tan(2^{-3n})$, e per la funzione $t \mapsto \tan t$, con $t = 2^{-3n}$, si ottiene:

$$\begin{aligned} a_n &:= \log\left[1 + \tan(2^{-3n} + 5\pi)\right] e^{2\alpha n} = \log\left[1 + \tan(2^{-3n})\right] e^{2\alpha n} \\ &\sim \tan(2^{-3n})\, e^{2\alpha n} \sim 2^{-3n}\, e^{2\alpha n} = \frac{e^{2\alpha n}}{e^{3n \log 2}} = e^{(2\alpha - 3\log 2)n}\,. \end{aligned}$$

Quindi,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha > (3\log 2)/2, \\ 1 & \text{se } \alpha = (3\log 2)/2, \\ 0 & \text{se } \alpha < (3\log 2)/2. \end{cases}$$

Esercizio 6

a) L'affermazione è errata poiché scegliendo, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n = 1/n$ si ottiene $a_n b_n = 1$, quindi il termine generale della serie proposta non è neppure infinitesimo.

b) L'affermazione è corretta in quanto $|(-1)^{a_n} b_n^2| \sim 1/n^2$, quindi per confronto con la serie armonica generalizzata, la serie proposta converge.

c) L'affermazione è errata poiché scegliendo, ad esempio, $a_n = n$ e $b_n = 1/n$ si ottiene $2^{1/a_n} b_n \sim 1/n$, quindi per confronto con la serie armonica, la serie proposta diverge.

d) L'affermazione è corretta in quanto $a_n b_n^{-2} \sim n^3$, quindi la serie proposta diverge.