SOLUZIONI COMPITO dello 07/09/2009
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1
Ponendo $a_n := \frac{3n+\mathrm{e}^n}{3^{2n}+\log n}$ e ricordando gli ordini di infinito, si ricava che $a_n \sim \frac{\mathrm{e}^n}{3^{2n}}$. Utilizzando ora il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{e}^n}{9^n}} = \frac{\mathrm{e}}{9} < 1\,.$$

La serie, pertanto, risulta essere convergente.

Esercizio 2

1) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 1 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 1$; quindi la soluzione dell'omogenea associata sarà data da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x}$. Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^x$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, si ottiene

$$2A\mathrm{e}^x + Ax\mathrm{e}^x - Ax\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1/2\,,$$

quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x$.

2) Imponendo, ora, la condizione richiesta, si ricava

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = \lim_{x\to-\infty} [C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_2 = 0\,.$$

Esercizio 3
Poiché la funzione integranda è continua in $(2, +\infty)$, essa sarà integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato ivi contenuto; pertanto, l'integrale proposto sarà finito se la funzione risulterà impropriamente integrabile in un intorno destro di 2 ed in un intorno sinistro di $+\infty$. Per $x \to 2^+$ si ha

$$f(x) \sim \left(2\sin\frac{1}{\sqrt{8}}\right)\frac{1}{(x-2)^\alpha} \qquad \text{che è integrabile} \Longleftrightarrow \alpha < 1.$$

Per $x \to +\infty$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine della funzione $t \mapsto \sin t$, con $t = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x}{x^\alpha\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/2}} \qquad \text{che è integrabile} \Longleftrightarrow \alpha + 1/2 > 1, \text{ ovvero } \alpha > 1/2.$$

Quindi, l'integrale proposto esiste finito se e solo se $1/2 < \alpha < 1$.

Esercizio 4
Calcolando la derivata prima e seconda di f si ottiene

$$f'(x) = x\cos x + \sin x \qquad\qquad f''(x) = 2\cos x - x\sin x\,.$$

Pertanto,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \tan x \geq -x\,, \qquad\qquad f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cot x \geq x/2\,.$$

Da un semplice confronto grafico, si ricava che la prima disuguaglianza è sempre soddisfatta in $[0, \pi/2]$, mentre per la seconda si ricava che esiste $x_0 \in (0, \pi/2)$ tale che $f''(x) > 0$ per $x \in [0, x_0)$, $f''(x) < 0$ per $x \in (x_0, \pi/2]$ ed $f''(x_0) = 0$.
Quindi f è sempre crescente, ha un punto di minimo assoluto in $x = 0$ e un punto di massimo assoluto in $x = \pi/2$; ha un punto di flesso in x_0, è convessa in $[0, x_0)$ ed è concava in $(x_0, \pi/2]$.

Esercizio 5

1) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\begin{aligned} y'(x) &= -Cg'(x)\mathrm{e}^{-g(x)} - g'(x)\mathrm{e}^{-g(x)} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{g(t)}\,dt + \mathrm{e}^{-g(x)} f(x)\mathrm{e}^{g(x)} \\ &= -Cg'(x)\mathrm{e}^{-g(x)} - g'(x)\mathrm{e}^{-g(x)} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{g(t)}\,dt + f(x) \equiv -g'(x)y(x) + f(x)\,. \end{aligned}$$

2) Sostituendo $g(x) = 3$, da cui $g'(x) = 0$, e ricordando che si deve avere $y(x) = \arctan x + 1$, da cui $y'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si ricava

$$\frac{1}{1+x^2} = y'(x) = f(x)$$

e

$$\arctan x + 1 = y(x) = C\mathrm{e}^{-g(x)} + \mathrm{e}^{-g(x)} \int_0^x f(t)\mathrm{e}^{g(t)}\,dt = C\mathrm{e}^{-3} + \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = C\mathrm{e}^{-3} + \arctan x\,.$$

Quindi, $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $C\mathrm{e}^{-3} = 1$, da cui si ricava $C = \mathrm{e}^3$.

Esercizio 6

Per determinare il campo di esistenza della funzione f si devono imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} - 1 > 0; \quad x \neq 0; \\ x - y^2 > 0; \\ 1 - 2x > 0; \quad 1 - 2x \neq 1; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y > x^2; \quad x \neq 0 \\ x > y^2; \\ x < 1/2; \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Quindi l'insieme cercato sarà dato dall'intersezione della porzione di piano che sta sopra la parabola di equazione $y = x^2$ con la porzione di piano che sta dentro la parabola $x = y^2$ e con la porzione di piano che sta a sinistra della retta verticale di equazione $x = 1/2$, escludendo tutto il bordo.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $a_n := \frac{\log^5 n + \mathrm{e}^{3n}}{5^n + n^5}$ e ricordando gli ordini di infinito, si ricava che $a_n \sim \frac{\mathrm{e}^{3n}}{5^n}$. Utilizzando ora il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{e}^{3n}}{5^n}} = \frac{\mathrm{e}^3}{5} > 1\,.$$

La serie, pertanto, risulta essere divergente.

Esercizio 2

1) L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2$; quindi la soluzione dell'omogenea associata sarà data da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$. Dal metodo di somiglianza si ottiene, invece, che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa, si ottiene

$$-4A\mathrm{e}^{-2x} + 4Ax\mathrm{e}^{-2x} - 4Ax\mathrm{e}^{-2x} = -4\mathrm{e}^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,,$$

quindi l'integrale generale dell'equazione proposta è $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{-2x}$.

2) Imponendo, ora, la condizione richiesta, si ricava

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = \lim_{x\to+\infty} [C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + x\mathrm{e}^{-2x}] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_1 = 0\,.$$

Esercizio 3

Poiché la funzione integranda è continua in $(1, +\infty)$, essa sarà integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato ivi contenuto; pertanto, l'integrale proposto sarà finito se la funzione risulterà impropriamente integrabile in un intorno destro di 1 ed in un intorno sinistro di $+\infty$. Per $x \to 1^+$ si ha

$$f(x) \sim (\sinh 1)\,\frac{1}{(x-1)^\alpha} \qquad \text{che è integrabile} \Longleftrightarrow \alpha < 1.$$

Per $x \to +\infty$, utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine della funzione $t \mapsto \sinh t$, con $t = \frac{1}{\sqrt{x}}$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^{1/4}}{x^\alpha \sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha+1/4}} \qquad \text{che è integrabile} \Longleftrightarrow \alpha + 1/4 > 1, \text{ ovvero } \alpha > 3/4.$$

Quindi, l'integrale proposto esiste finito se e solo se $3/4 < \alpha < 1$.

Esercizio 4

Calcolando la derivata prima e seconda di f si ottiene

$$f'(x) = \cos x - x\sin x \qquad\qquad f''(x) = -2\sin x - x\cos x\,.$$

Pertanto,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \cot x \geq x\,, \qquad\qquad f''(x) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -\tan x \geq x/2\,.$$

Da un semplice confronto grafico, si ricava che per la prima disuguaglianza esiste $x_0 \in (0, \pi/2)$ tale che $f'(x) > 0$ per $x \in [0, x_0)$, $f'(x) < 0$ per $x \in (x_0, \pi/2]$ ed $f'(x_0) = 0$, mentre la seconda disuguaglianza non è mai soddisfatta in $[0, \pi/2]$.
Quindi f è sempre concava, ha un punto di massimo assoluto in x_0, due punti di minimo assoluto in $x = 0$ e $x = \pi/2$, è crescente in $[0, x_0)$ ed è decrescente in $(x_0, \pi/2]$.

Esercizio 5

1) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si ottiene

$$\begin{aligned} y'(x) &= Cf'(x)\mathrm{e}^{f(x)} + f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{-f(t)}\,dt + \mathrm{e}^{f(x)}g(x)\mathrm{e}^{-f(x)} \\ &= Cf'(x)\mathrm{e}^{f(x)} + f'(x)\mathrm{e}^{f(x)} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{-f(t)}\,d + g(x) \equiv f'(x)y(x) + g(x)\,. \end{aligned}$$

2) Sostituendo $f(x) = 2$, da cui $f'(x) = 0$, e ricordando che si deve avere $y(x) = \sin x + 2$, da cui $y'(x) = \cos x$, si ricava

$$\cos x = y'(x) = g(x)$$

e

$$\sin x + 2 = y(x) = C\mathrm{e}^{f(x)} + \mathrm{e}^{f(x)} \int_0^x g(t)\mathrm{e}^{-f(t)}\,dt = C\mathrm{e}^2 + \int_0^x \cos t\,dt = C\mathrm{e}^2 + \sin x\,.$$

Quindi, $g(x) = \cos x$ e $C\mathrm{e}^2 = 2$, da cui si ricava $C = 2\mathrm{e}^{-2}$.

Esercizio 6

Per determinare il campo di esistenza della funzione f si devono imporre le seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x^2} - 1 > 0; \quad x \neq 0; \\ x - y^2 > 0; \\ 1 - 2x > 0; \quad 1 - 2x \neq 1; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y > x^2; \quad x \neq 0 \\ x > y^2; \\ x < 1/2; \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Quindi l'insieme cercato sarà dato dall'intersezione della porzione di piano che sta sopra la parabola di equazione $y = x^2$ con la porzione di piano che sta dentro la parabola $x = y^2$ e con la porzione di piano che sta a sinistra della retta verticale di equazione $x = 1/2$, escludendo tutto il bordo.