CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 8 gennaio 2010	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z-2\overline{z})^2 = 1\,.$$

---

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y''(x) + \alpha y'(x) - 2\alpha^2 y(x) = 0\,, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3\,. \end{cases}$$

a) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione $y_\alpha(x)$ di (P) .
b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x)\,.$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\left(1-\cos\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^{\alpha}}{\left[\exp\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)-1\right]^{1-\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $[1,+\infty)$.

---

4. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^4+1}}{2x+1}\,,$$

determinarne il campo d'esistenza D , i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi, decrescente e infinitesima. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, giustificando la risposta:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n a_n^2$ converge; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1+a_n}{2+a_n^2}$ converge;
3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{a_n}{2+a_n}$ converge; 4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \log(1+a_n)$ converge.

---

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y) = -2x^3 - 3x^2y + 3x^2 + 6xy\,,$$

stabilire la natura dei suoi punti critici.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 8 gennaio 2010	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(\overline{z} - 2z)^2 = -1\,.$$

---

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y''(x) - \alpha y'(x) - 2\alpha^2 y(x) = 0\,, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -3\,. \end{cases}$$

a) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione $y_\alpha(x)$ di (P) .
b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x)\,.$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{[\sin(x\sqrt[4]{x})]^{2+\alpha}}{[\log(1 + x\sqrt{x})]^\alpha}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $(0, 1]$.

---

4. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^8 + 3}}{1 - 8x^3}\,,$$

determinarne il campo d'esistenza D , i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi, crescente e infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, giustificando la risposta:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{3+a_n^2}$ converge; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1+a_n^2}{3+a_n}$ converge;
3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{a_n}{2+a_n}$ converge; 4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \log\left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$ converge.

---

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = -2x^3 - 3x^2y + 3x^2 + 6xy\,,$$

stabilire la natura dei suoi punti critici.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 8 gennaio 2010	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(\overline{z}+2z)^2=-1\,.$$

---

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$(P)\qquad \begin{cases} y''(x)-2\alpha y'(x)-3\alpha^2 y(x)=0\,,\\ y(0)=0, \quad y'(0)=-4\,. \end{cases}$$

a) Determinare, al variare del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$, la soluzione $y_\alpha(x)$ di (P) .
b) Calcolare, al variare di $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x)\,.$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha\in\mathbb{R}$ la funzione

$$f(x)=\frac{[\log(1+x\sqrt[4]{x})]^\alpha}{[\sin(x\sqrt{x})]^{2+3\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $(0,1]$.

---

4. Data la funzione $f:D\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=\frac{\sqrt{9x^8+4}}{1+27x^3}\,,$$

determinarne il campo d'esistenza D , i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi, crescente e infinita. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, giustificando la risposta:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\log\left(1+\frac{1}{a_n}\right)$ converge; 2) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{3+a_n^2}$ converge;
3) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{a_n}{2+a_n}$ converge; 4) $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1+a_n^2}{3+a_n}$ converge.

---

6. Data la funzione $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definita da

$$f(x,y)=-2x^3-3x^2y+3x^2+6xy\,,$$

stabilire la natura dei suoi punti critici.

CALCOLO DIFF. e INT. I+II (h. 3) ☐ ANALISI I (h. 2.30) ☐ Appello del 8 gennaio 2010	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea: Meccanica ☐ Elettrica ☐

Barrare la casella corrispondente all'esame e al corso di laurea di competenza.
Gli studenti che sostengono l'esame di Analisi I NON devono svolgere l'esercizio n. 6.

1. Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z + 2\overline{z})^2 = 1\,.$$

---

2. Si consideri il problema di Cauchy

$$(P) \qquad \begin{cases} y''(x) + 2\alpha y'(x) - 3\alpha^2 y(x) = 0\,, \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 4\,. \end{cases}$$

a) Determinare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la soluzione $y_\alpha(x)$ di (P).
b) Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to -\infty} y_\alpha(x)\,.$$

---

3. Stabilire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x) = \frac{\left[\exp\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right) - 1\right]^\alpha}{\left(1 - \cos\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^{1-2\alpha}}$$

è impropriamente integrabile nell'intervallo $[1, +\infty)$.

---

4. Data la funzione $f : D \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{4x^4 + 2}}{3x - 1}\,,$$

determinarne il campo d'esistenza D, i limiti alla frontiera e gli eventuali asintoti.

---

5. Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali non negativi, decrescente e infinitesima. Stabilire quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false, giustificando la risposta:

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n^2$ converge;
2) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log(1 + a_n)$ converge;
3) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1+a_n}{2+a_n^2}$ converge;
4) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{a_n}{2+a_n}$ converge.

---

6. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = -2x^3 - 3x^2 y + 3x^2 + 6xy\,,$$

stabilire la natura dei suoi punti critici.