SOLUZIONI COMPITO del 8/01/2010
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Ponendo $w = z - 2\overline{z}$, l'equazione proposta si riconduce a $w^2 = 1$, da cui $w = \pm 1$. Quindi, riscrivendo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$-a + 3ib = \pm 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \pm 1,\ b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \pm 1\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Per $\alpha = 0$, essa si riduce all'equazione $y''(x) = 0$, che ha come soluzione $y_0(x) = C_1 x + C_2$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava $C_2 = 0$ e $C_1 = 3$, da cui $y_0(x) = 3x$. Per $\alpha \neq 0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \alpha\lambda - 2\alpha^2 = 0$, che ha come soluzioni reali e distinte $\lambda = -2\alpha, \alpha$. Pertanto l'integrale generale sarà $y_\alpha(x) = C_1 \mathrm{e}^{-2\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0\,, \\ -2\alpha C_1 + \alpha C_2 = 3\,, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} C_1 = -C_2\,, \\ 3\alpha C_2 = 3\,, \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} C_2 = 1/\alpha\,, \\ C_1 = -1/\alpha\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione sarà data dalla funzione $y_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{-2\alpha x})$.

b) Ovviamente, per $\alpha = 0$, si ricava che $\lim_{x\to+\infty} y_0(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x = +\infty$.

Per $\alpha > 0$, si ricava, invece, che

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{-2\alpha x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{\alpha x} = +\infty\,.$$

Infine, per $\alpha < 0$, si ricava che

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{-2\alpha x}) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}\mathrm{e}^{-2\alpha x} = +\infty\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $[1, +\infty)$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno $I(+\infty)$. Tenendo conto del comportamento asintotico per $y \to 0$ della funzione $y \mapsto 1 - \cos y$, con $y = 1/x\sqrt{x}$ e di quello della funzione $y \mapsto \mathrm{e}^y - 1$, con $y = 1/x\sqrt[3]{x}$, si ricava che, per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{1}{2(x\sqrt{x})^2}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}\right)^{1-\alpha}} = \frac{1}{2^\alpha}\frac{x^{4(1-\alpha)/3}}{x^{3\alpha}} = \frac{1}{2^\alpha}\frac{1}{x^{13\alpha/3-4/3}}\,.$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $13\alpha/3 - 4/3 > 1$, ovvero per $\alpha > \frac{7}{13}$.

Esercizio 4

Il campo di esistenza della funzione proposta è determinato dalla condizione $2x + 1 \neq 0$, ovvero $D = (-\infty, -1/2) \cup (-1/2, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-1/2)^\pm} f(x) = \pm\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x = -1/2 \quad \text{è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2x} = \pm\infty\,, \qquad m = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - x/2) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{2\sqrt{x^4+1} - x(2x+1)}{2(2x+1)} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x^4 + 4 - 4x^4 - 4x^3 - x^2}{2(2x+1)[2\sqrt{x^4+1} + x(2x+1)]}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{4x^3}{16x^3} = -\frac{1}{4} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \quad \text{è asintoto obliquo per } x \to \pm\infty\,.$$

Esercizio 5

Le risposte 1), 3) e 4) sono corrette, infatti essendo $\{a_n\}$ positiva, decrescente e infinitesima, anche $\{a_n^2\}$, $\{\frac{a_n}{1+a_n}\}$ e $\{\log(1+a_n)\}$ lo sono; quindi sono soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segno alterno.

Al contrario, la risposta 2) è errata, poiché in tal caso non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, in quanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+a_n}{2+a_n^2} = 1/2$.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto per determinare i suoi punti critici e studiarne la natura possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Imponiamo, dapprima, l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6x^2 - 6xy + 6x + 6y = 0; \\ f_y(x,y) = -3x^2 + 6x = 0; \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + xy - x - y = 0; \\ -x^2 + 2x = 0; \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 2; \\ 4 + 2y - 2 - y = 0; \end{cases} \implies \begin{cases} x = 2; \\ y = -2. \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,-2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x - 6y + 6 & -6x + 6 \\ -6x + 6 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava

$$det\big(H_f(P_1)\big) = \left|\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right| = -36 < 0 \qquad \text{e} \qquad det\big(H_f(P_2)\big) = \left|\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\right| = -36 < 0\,.$$

Pertanto entrambi i punti stazionari P_1 e P_2 sono punti di sella.

TEMA B

Esercizio 1

Ponendo $w = \overline{z} - 2z$, l'equazione proposta si riconduce a $w^2 = -1$, da cui $w = \pm i$. Quindi, riscrivendo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$-a - 3ib = \pm i \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0,\ b = \pm 1/3 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \pm i/3\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Per $\alpha = 0$, essa si riduce all'equazione $y''(x) = 0$, che ha come soluzione $y_0(x) = C_1 x + C_2$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava $C_2 = 0$ e $C_1 = -3$, da cui $y_0(x) = -3x$. Per $\alpha \neq 0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \alpha\lambda - 2\alpha^2 = 0$, che ha come soluzioni reali e distinte $\lambda = 2\alpha, -\alpha$. Pertanto l'integrale generale sarà $y_\alpha(x) = C_1 \mathrm{e}^{2\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0\,, \\ 2\alpha C_1 - \alpha C_2 = -3\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_1 = -C_2\,, \\ 3\alpha C_2 = 3\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_2 = 1/\alpha\,, \\ C_1 = -1/\alpha\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione sarà data dalla funzione $y_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{2\alpha x})$.

b) Ovviamente, per $\alpha = 0$, si ricava che $\lim_{x\to+\infty} y_0(x) = \lim_{x\to+\infty} -3x = -\infty$.

Per $\alpha > 0$, si ricava, invece, che

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{2\alpha x}) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{2\alpha x} = -\infty\,.$$

Infine, per $\alpha < 0$, si ricava che

$$\lim_{x\to+\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{2\alpha x}) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha x} = -\infty\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $(0,1]$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno destro $I(0^+)$. Tenendo conto del comportamento asintotico per $y \to 0$ della funzione $y \mapsto \sin y$, con $y = x\sqrt[4]{x}$ e di quello della funzione $y \mapsto \log(1+y)$, con $y = x\sqrt{x}$, si ricava che, per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{(x\sqrt[4]{x})^{2+\alpha}}{(x\sqrt{x})^{\alpha}} = \frac{x^{5(2+\alpha)/4}}{x^{3\alpha/2}} = \frac{1}{x^{\alpha/4-5/2}}\,.$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $\alpha/4 - 5/2 < 1$, ovvero per $\alpha < 14$.

Esercizio 4

Il campo di esistenza della funzione proposta è determinato dalla condizione $1 - 8x^3 \neq 0$, ovvero $D = (-\infty, 1/2) \cup (1/2, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to(1/2)^\pm} f(x) = \mp\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1/2 \quad \text{è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2x^4}{8x^3} = \mp\infty\,, \qquad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{2x^4}{8x^4} = -1/4\,,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) + x/4) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4\sqrt{4x^8+3} + x(1-8x^3)}{4(1-8x^3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{64x^8 + 48 - 64x^8 + 16x^5 - x^2}{4(1-8x^3)[4\sqrt{4x^8+3} - x(1-8x^3)]}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^5}{32x^7} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = -\frac{1}{4}x \quad \text{è asintoto obliquo per } x \to \pm\infty\,.$$

Esercizio 5

Le risposte 1) e 4) sono corrette, infatti essendo $\{a_n\}$ positiva, crescente e infinita, allora $\{\frac{1}{3+a_n^2}\}$ e $\{\log(1+\frac{1}{a_n})\}$ sono positive, decrescenti e infinitesime; quindi sono soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segno alterno.

Al contrario, le risposte 2) e 3) sono errate, poiché in tal caso non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, in quanto $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{2+a_n}=1$ e $\lim_{n\to+\infty}\frac{1+a_n^2}{3+a_n}=+\infty$.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto per determinare i suoi punti critici e studiarne la natura possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Imponiamo, dapprima, l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y)=-6x^2-6xy+6x+6y=0; \\ f_y(x,y)=-3x^2+6x=0; \end{cases} \implies \begin{cases} x^2+xy-x-y=0; \\ -x^2+2x=0; \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} x=0; \\ y=0; \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x=2; \\ 4+2y-2-y=0; \end{cases} \implies \begin{cases} x=2; \\ y=-2. \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $P_1=(0,0)$ e $P_2=(2,-2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f:

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} -12x-6y+6 & -6x+6 \\ -6x+6 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava

$$det\big(H_f(P_1)\big)=\left|\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right|=-36<0 \qquad \text{e} \qquad det\big(H_f(P_2)\big)=\left|\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\right|=-36<0\,.$$

Pertanto entrambi i punti stazionari P_1 e P_2 sono punti di sella.

TEMA C

Esercizio 1

Ponendo $w = \overline{z} + 2z$, l'equazione proposta si riconduce a $w^2 = -1$, da cui $w = \pm i$. Quindi, riscrivendo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$3a + ib = \pm i \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0,\ b = \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \pm i\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Per $\alpha = 0$, essa si riduce all'equazione $y''(x) = 0$, che ha come soluzione $y_0(x) = C_1 x + C_2$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava $C_2 = 0$ e $C_1 = -4$, da cui $y_0(x) = -4x$. Per $\alpha \neq 0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 2\alpha\lambda - 3\alpha^2 = 0$, che ha come soluzioni reali e distinte $\lambda = 3\alpha, -\alpha$. Pertanto l'integrale generale sarà $y_\alpha(x) = C_1 \mathrm{e}^{3\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{-\alpha x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0\,, \\ 3\alpha C_1 - \alpha C_2 = -4\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_1 = -C_2\,, \\ -4\alpha C_2 = -4\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_2 = 1/\alpha\,, \\ C_1 = -1/\alpha\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione sarà data dalla funzione $y_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{3\alpha x})$.

b) Ovviamente, per $\alpha = 0$, si ricava che $\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = \lim_{x\to-\infty} -4x = +\infty$.

Per $\alpha > 0$, si ricava, invece, che

$$\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{3\alpha x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-\alpha x} = +\infty\,.$$

Infine, per $\alpha < 0$, si ricava che

$$\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{3\alpha x}) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{3\alpha x} = +\infty\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $(0, 1]$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno destro $I(0^+)$. Tenendo conto del comportamento asintotico per $y \to 0$ della funzione $y \mapsto \sin y$, con $y = x\sqrt{x}$ e di quello della funzione $y \mapsto \log(1 + y)$, con $y = x\sqrt[4]{x}$, si ricava che, per $x \to 0^+$

$$f(x) \sim \frac{(x\sqrt[4]{x})^\alpha}{(x\sqrt{x})^{2+3\alpha}} = \frac{x^{5\alpha/4}}{x^{3(2+3\alpha)/2}} = \frac{1}{x^{13\alpha/4+3}}\,.$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $13\alpha/4 + 3 < 1$, ovvero per $\alpha < -\frac{8}{13}$.

Esercizio 4

Il campo di esistenza della funzione proposta è determinato dalla condizione $1 + 27x^3 \neq 0$, ovvero $D = (-\infty, -1/3) \cup (-1/3, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to(-1/3)^\pm} f(x) = \pm\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x = -1/3 \quad \text{è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4}{27x^3} = \pm\infty\,, \qquad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^4}{27x^4} = 1/9\,,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - x/9) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{9\sqrt{9x^8+4} - x(1+27x^3)}{9(1+27x^3)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(27)^2x^8 + 324 - (27)^2x^8 - 54x^5 - x^2}{9(1+27x^3)[9\sqrt{9x^8+4} + x(1+27x^3)]}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} -\frac{x^5}{243x^7} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{1}{9}x \quad \text{è asintoto obliquo per } x \to \pm\infty\,.$$

Esercizio 5

Le risposte 1) e 2) sono corrette, infatti essendo $\{a_n\}$ positiva, crescente e infinita, allora $\{\frac{1}{3+a_n^2}\}$ e $\{\log(1+\frac{1}{a_n})\}$ sono positive, decrescenti e infinitesime; quindi sono soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segno alterno.

Al contrario, le risposte 3) e 4) sono errate, poiché in tal caso non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, in quanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{2+a_n} = 1$ e $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+a_n^2}{3+a_n} = +\infty$.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto per determinare i suoi punti critici e studiarne la natura possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Imponiamo, dapprima, l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6x^2 - 6xy + 6x + 6y = 0; \\ f_y(x,y) = -3x^2 + 6x = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - x - y = 0; \\ -x^2 + 2x = 0; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 2; \\ 4 + 2y - 2 - y = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = -2. \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,-2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x - 6y + 6 & -6x + 6 \\ -6x + 6 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava

$$det\big(H_f(P_1)\big) = \left| \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} \right| = -36 < 0 \qquad \text{e} \qquad det\big(H_f(P_2)\big) = \left| \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix} \right| = -36 < 0\,.$$

Pertanto entrambi i punti stazionari P_1 e P_2 sono punti di sella.

TEMA D

Esercizio 1

Ponendo $w = z + 2\overline{z}$, l'equazione proposta si riconduce a $w^2 = 1$, da cui $w = \pm 1$. Quindi, riscrivendo $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$3a - ib = \pm 1 \qquad \Longrightarrow \qquad a = \pm 1/3,\ b = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad z = \pm 1/3\,.$$

Esercizio 2

a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Per $\alpha = 0$, essa si riduce all'equazione $y''(x) = 0$, che ha come soluzione $y_0(x) = C_1 x + C_2$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava $C_2 = 0$ e $C_1 = 4$, da cui $y_0(x) = 4x$. Per $\alpha \neq 0$, l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 2\alpha\lambda - 3\alpha^2 = 0$, che ha come soluzioni reali e distinte $\lambda = -3\alpha, \alpha$. Pertanto l'integrale generale sarà $y_\alpha(x) = C_1 \mathrm{e}^{-3\alpha x} + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}$. Imponendo le condizioni iniziali, si ricava

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0\,, \\ -3\alpha C_1 + \alpha C_2 = 4\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_1 = -C_2\,, \\ 4\alpha C_2 = 4\,, \end{cases} \qquad \text{da cui} \qquad \begin{cases} C_2 = 1/\alpha\,, \\ C_1 = -1/\alpha\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione sarà data dalla funzione $y_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{-3\alpha x})$.

b) Ovviamente, per $\alpha = 0$, si ricava che $\lim_{x\to-\infty} y_0(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x = -\infty$.

Per $\alpha > 0$, si ricava, invece, che

$$\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{-3\alpha x}) = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{-3\alpha x} = -\infty\,.$$

Infine, per $\alpha < 0$, si ricava che

$$\lim_{x\to-\infty} y_\alpha(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{-3\alpha x}) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{e}^{\alpha x} = -\infty\,.$$

Esercizio 3

Osserviamo, innanzitutto, che la funzione proposta è positiva e continua sull'intervallo $[1, +\infty)$, quindi bisogna studiarne solo il comportamento in un intorno $I(+\infty)$. Tenendo conto del comportamento asintotico per $y \to 0$ della funzione $y \mapsto 1 - \cos y$, con $y = 1/x\sqrt[3]{x}$ e di quello della funzione $y \mapsto \mathrm{e}^y - 1$, con $y = 1/x\sqrt{x}$, si ricava che, per $x \to +\infty$

$$f(x) \sim \frac{\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}\right)^\alpha}{\left(\frac{1}{2(x\sqrt[3]{x})^2}\right)^{1-2\alpha}} = 2^{1-2\alpha}\frac{x^{8(1-2\alpha)/3}}{x^{3\alpha/2}} = 2^{1-2\alpha}\frac{1}{x^{41\alpha/6-8/3}}\,.$$

Pertanto la funzione risulterà impropriamente integrabile se e solo se $41\alpha/6 - 8/3 > 1$, ovvero per $\alpha > \frac{22}{41}$.

Esercizio 4

Il campo di esistenza della funzione proposta è determinato dalla condizione $3x - 1 \neq 0$, ovvero $D = (-\infty, 1/3) \cup (1/3, +\infty)$. Inoltre

$$\lim_{x\to(1/3)^\pm} f(x) = \pm\infty \qquad \Longrightarrow \qquad x = 1/3 \quad \text{è asintoto verticale;}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{3x} = \pm\infty\,, \qquad m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{3x^2} = \frac{2}{3}\,,$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 2x/3) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3\sqrt{4x^4+2} - 2x(3x-1)}{3(3x-1)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{36x^4 + 18 - 36x^4 + 24x^3 - 4x^2}{3(3x-1)[3\sqrt{4x^4+2} + 2x(3x-1)]}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3}{9x^3} = \frac{2}{9} \qquad \Longrightarrow \qquad y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{9} \quad \text{è asintoto obliquo per } x \to \pm\infty\,.$$

Esercizio 5

Le risposte 1), 2) e 4) sono corrette, infatti essendo $\{a_n\}$ positiva, decrescente e infinitesima, anche $\{a_n^2\}$, $\{\frac{a_n}{1+a_n}\}$ e $\{\log(1+a_n)\}$ lo sono; quindi sono soddisfatte le ipotesi del Criterio di Leibniz per la convergenza delle serie a segno alterno.

Al contrario, la risposta 3) è errata, poiché in tal caso non è soddisfatta la condizione necessaria per la convergenza delle serie, in quanto $\lim_{n\to+\infty} \frac{1+a_n}{2+a_n^2} = 1/2$.

Esercizio 6

Poiché f è un polinomio, esso è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, pertanto per determinare i suoi punti critici e studiarne la natura possiamo utilizzare i metodi del calcolo differenziale. Imponiamo, dapprima, l'annullamento del gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -6x^2 - 6xy + 6x + 6y = 0; \\ f_y(x,y) = -3x^2 + 6x = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - x - y = 0; \\ -x^2 + 2x = 0; \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 0; \\ y = 0; \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = 2; \\ 4 + 2y - 2 - y = 0; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = 2; \\ y = -2. \end{cases}$$

Quindi i punti critici sono $P_1 = (0,0)$ e $P_2 = (2,-2)$. Calcoliamo ora la matrice Hessiana di f:

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} -12x - 6y + 6 & -6x + 6 \\ -6x + 6 & 0 \end{pmatrix},$$

da cui si ricava

$$det\big(H_f(P_1)\big) = \left|\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}\right| = -36 < 0 \qquad \text{e} \qquad det\big(H_f(P_2)\big) = \left|\begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}\right| = -36 < 0\,.$$

Pertanto entrambi i punti stazionari P_1 e P_2 sono punti di sella.