SOLUZIONI COMPITO del 08/01/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $(z+i)^4 = \frac{1}{16}$, da cui si ricava

$$z = -i + \sqrt[4]{\frac{1}{16}} = -i + \sqrt[4]{\frac{1}{16}\,\mathrm{e}^{i0}} = \begin{cases} -\,i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i0/4} = -i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i0} = -i + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - i\,, \\[2ex] -\,i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i2\pi/4} = -i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/2} = -i + \dfrac{i}{2} = -\dfrac{i}{2}\,, \\[2ex] -\,i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i4\pi/4} = -i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\pi} = -i - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{2} - i\,, \\[2ex] -\,i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i6\pi/4} = -i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -i - \dfrac{i}{2} = -\dfrac{3i}{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[\left(1 + \sin\frac{1}{n^2}\right)^{2n^2} - \mathrm{e}^2\right] n^2 = n^2\mathrm{e}^2\left[\mathrm{e}^{2n^2\log\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right)-2} - 1\right]\,.$$

Tenendo conto che

$$2n^2\log\left(1 + \sin\frac{1}{n^2}\right) \sim 2n^2\sin\frac{1}{n^2} \sim 2n^2\,\frac{1}{n^2} = 2\,,$$

e quindi che l'esponente $2n^2\log\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right) - 2$ è infinitesimo, e ricordando che $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, con $t = 2n^2\log\left(1+\sin\frac{1}{n^2}\right) - 2$, otteniamo

$$a_n \sim n^2\mathrm{e}^2\left[2n^2\log\left(1 + \sin\frac{1}{n^2}\right) - 2\right]\,.$$

Utilizzando, infine, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = \sin\frac{1}{n^2}$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sin x$, con $x = 1/n^2$, ricaviamo

$$\begin{aligned} a_n &\sim n^2\mathrm{e}^2\left[2n^2\sin\frac{1}{n^2} - \frac{2n^2}{2}\left(\sin\frac{1}{n^2}\right)^2 - 2\right] \\ &\sim n^2\mathrm{e}^2\left[2n^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3\right) - n^2\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3\right)^2 - 2\right] \\ &\sim n^2\mathrm{e}^2\left[2 - \frac{1}{n^2} - 2\right] \to -\mathrm{e}^2\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1; 2$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Axe^x$, da cui $y_p'(x) = Ae^x(x+1)$ e $y_p''(x) = Ae^x(x+2)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$Ae^x(x+2) - 3Ae^x(x+1) + 2Axe^x = 2e^x \qquad \Longrightarrow \qquad A = -2\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - 2xe^x$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}[y(x) + 2(x+5)e^x] = \lim_{x\to+\infty}[(C_1+10)e^x + C_2 e^{2x}] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -10\,, \\ C_2 = 0\,. \end{cases}$$

Quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente la condizione richiesta ed è data da $y(x) = -(10+2x)e^x$.

Esercizio 4

Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0(0,1)$, quindi va studiata solo agli estremi. Per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^{2-\alpha}\sin 1}{x^3} = \frac{\sin 1}{x^{1+\alpha}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $1 + \alpha < 1$, cioè $\alpha < 0$.

Invece, per $x \to 1^-$, tenendo conto che $\alpha^2 + 1 > 0$ e $\sin\left[(1-x)^{\alpha^2+1}\right] \sim (1-x)^{\alpha^2+1}$, si ha

$$f(x) \sim \frac{(1-x)^{\alpha^2+1}}{(1-x)^3} = \frac{1}{(1-x)^{2-\alpha^2}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $2 - \alpha^2 < 1$, cioè $\alpha < -1$ o $\alpha > 1$.

In conclusione, l'integrale proposto converge per $\alpha < -1$.

Esercizio 5

Osserviamo che, ponendo $t = x + 1$, ovvero $x = t - 1$, possiamo riscrivere $f(x+1) = f(t)$, dove per $x \to 0$ abbiamo $t \to 1$. Pertanto,

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^2} = \lim_{t\to 1}\frac{f(t)}{(t-1)^2} = \lim_{t\to 1}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)^2} = 2\,;$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x+1)}{x^3} = \lim_{t\to 1^+}\frac{f(t)}{(t-1)^3} = \lim_{t\to 1^+}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)^3} = +\infty\,;$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x^4} = \lim_{t\to 1}\frac{f(t)}{(t-1)^4} = \lim_{t\to 1}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)^4} = +\infty\,;$$

$$\text{d)}\quad \lim_{x\to 0}\frac{f(x+1)}{x} = \lim_{t\to 1}\frac{f(t)}{(t-1)} = \lim_{t\to 1}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)} = 0\,.$$

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $(z+2i)^3 = -\frac{1}{8i} = \frac{i}{8}$, da cui si ricava

$$z = -2i + \sqrt[3]{\frac{i}{8}} = -2i + \sqrt[3]{\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{i\pi/2}} = \begin{cases} -2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/6} = -2i + \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{7i}{4}\,, \\[2ex] -2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i5\pi/6} = -2i - \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{i}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{7i}{4}\,, \\[2ex] -2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i9\pi/6} = -2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -2i - \dfrac{i}{2} = -\dfrac{5i}{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[\left(1+\tanh\frac{1}{n}\right)^{4n} - \mathrm{e}^4\right] n = n\mathrm{e}^4\left[\mathrm{e}^{4n\log\left(1+\tanh\frac{1}{n}\right)-4} - 1\right].$$

Tenendo conto che

$$4n\log\left(1+\tanh\frac{1}{n}\right) \sim 4n\tanh\frac{1}{n} \sim 4n\,\frac{1}{n} = 4\,,$$

e quindi che l'esponente $4n\log\left(1+\tanh\frac{1}{n}\right)-4$ è infinitesimo, e ricordando che $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, con $t = 4n\log\left(1+\tanh\frac{1}{n}\right)-4$, otteniamo

$$a_n \sim n\mathrm{e}^4\left[4n\log\left(1+\tanh\frac{1}{n}\right) - 4\right].$$

Utilizzando, infine, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = \tanh\frac{1}{n}$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \tanh x$, con $x = 1/n$, ricaviamo

$$\begin{aligned} a_n &\sim n\mathrm{e}^4\left[4n\tanh\frac{1}{n} - \frac{4n}{2}\left(\tanh\frac{1}{n}\right)^2 - 4\right] \\ &\sim n\mathrm{e}^4\left[4n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right) - 2n\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)^2 - 4\right] \\ &\sim n\mathrm{e}^4\left[4 - \frac{2}{n} - 4\right] \to -2\mathrm{e}^4\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2+\lambda-2=0$, che ha come soluzioni $\lambda = 1; -2$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-2x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-2x}(-2x+1)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-2x}(4x-4)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$A\mathrm{e}^{-2x}(4x-4) + A\mathrm{e}^{-2x}(-2x+1) - 2Ax\mathrm{e}^{-2x} = 6\mathrm{e}^{-2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = -2\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} - 2x\mathrm{e}^{-2x}$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty}[y(x) + 2(x+1)\mathrm{e}^{-2x}] = \lim_{x\to-\infty}(C_2+2)\mathrm{e}^{-2x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_2 = -2\,.$$

Quindi esistono infinite soluzioni dell'equazione differenziale soddisfacenti la condizione richiesta e sono date da $y(x) = C_1\mathrm{e}^x - 2(1+x)\mathrm{e}^{-2x}$, con $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0(1, +\infty)$, quindi va studiata solo agli estremi. Per $x \to 1^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{(x-1)\sinh 1}{2^{3\alpha-2}(x-1)^{3\alpha-2}} = \frac{\sinh 1}{2^{3\alpha-2}(x-1)^{3\alpha-3}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $3\alpha - 3 < 1$, cioè $\alpha < 4/3$.
Invece, per $x \to +\infty$, tenendo che $2\alpha^2 + 6 > 0$ e $\sinh\left(\frac{1}{x^{2\alpha^2+6}}\right) \sim \frac{1}{x^{2\alpha^2+6}}$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x\,\frac{1}{x^{2\alpha^2+6}}}{x^{6\alpha-4}} = \frac{1}{x^{2\alpha^2+6\alpha+1}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $2\alpha^2 + 6\alpha + 1 > 1$, cioè $\alpha < -3$ e $\alpha > 0$.
In conclusione, l'integrale proposto converge per $\alpha < -3$ o $0 < \alpha < 4/3$.

Esercizio 5

Osserviamo che, ponendo $t = x - 1$, ovvero $x = t + 1$, possiamo riscrivere $f(x-1) = f(t)$, dove per $x \to 0$ abbiamo $t \to -1$. Pertanto,

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x-1)}{x^2} = \lim_{t\to -1} \frac{f(t)}{(t+1)^2} = \lim_{t\to -1} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)^2} = 0\,; \\
\text{b)} & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x-1)}{x^3} = \lim_{t\to -1} \frac{f(t)}{(t+1)^3} = \lim_{t\to -1} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)^3} = 4\,; \\
\text{c)} & \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x-1)}{x^4} = \lim_{t\to -1^+} \frac{f(t)}{(t+1)^4} = \lim_{t\to -1^+} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)^4} = +\infty\,; \\
\text{d)} & \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x-1)}{x} = \lim_{t\to -1} \frac{f(t)}{(t+1)} = \lim_{t\to -1} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)} = 0\,.
\end{array}$$

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $(z-2i)^3 = \frac{1}{8i} = -\frac{i}{8}$, da cui si ricava

$$z = 2i + \sqrt[3]{-\frac{i}{8}} = 2i + \sqrt[3]{\frac{1}{8}\,\mathrm{e}^{-i\pi/2}} = \begin{cases} 2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-i\pi/6} = 2i + \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{7i}{4}\,, \\[2ex] 2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i3\pi/6} = 2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i\pi/2} = 2i + \dfrac{i}{2} = \dfrac{5i}{2}\,, \\[2ex] 2i + \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{i7\pi/6} = 2i - \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{i}{4} = -\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{7i}{4}\,, \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[\left(1 + \tan\frac{1}{n}\right)^{3n} - \mathrm{e}^3\right] n = n\mathrm{e}^3\left[\mathrm{e}^{3n\log\left(1+\tan\frac{1}{n}\right)-3} - 1\right].$$

Tenendo conto che

$$3n\log\left(1 + \tan\frac{1}{n}\right) \sim 3n\tan\frac{1}{n} \sim 3n\,\frac{1}{n} = 3\,,$$

e quindi che l'esponente $3n\log\left(1+\tan\frac{1}{n}\right) - 3$ è infinitesimo, e ricordando che $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, con $t = 3n\log\left(1+\tan\frac{1}{n}\right) - 3$, otteniamo

$$a_n \sim n\mathrm{e}^3\left[3n\log\left(1 + \tan\frac{1}{n}\right) - 3\right].$$

Utilizzando, infine, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = \tan\frac{1}{n}$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \tan x$, con $x = 1/n$, ricaviamo

$$\begin{aligned} a_n &\sim n\mathrm{e}^3\left[3n\tan\frac{1}{n} - \frac{3n}{2}\left(\tan\frac{1}{n}\right)^2 - 3\right] \\ &\sim n\mathrm{e}^3\left[3n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right) - \frac{3n}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{n}\right)^3\right)^2 - 3\right] \\ &\sim n\mathrm{e}^3\left[3 - \frac{3}{2n} - 3\right] \to -\frac{3\mathrm{e}^3}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1; 2$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{2x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{2x}(2x+1)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{2x}(4x+4)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$A\mathrm{e}^{2x}(4x+4) - A\mathrm{e}^{2x}(2x+1) - 2Ax\mathrm{e}^{2x} = 3\mathrm{e}^{2x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 1\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x}$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to+\infty}[y(x) + (2-x)\mathrm{e}^{2x}] = \lim_{x\to+\infty}(C_2 + 2)\mathrm{e}^{2x} = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad C_2 = -2\,.$$

Quindi esistono infinite soluzioni dell'equazione differenziale soddisfacenti la condizione richiesta e sono date da $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + (x-2)\mathrm{e}^{2x}$, con $C_1 \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4

Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0(1,+\infty)$, quindi va studiata solo agli estremi. Per $x \to 1^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{(x-1)^2(\sinh 1)^{2\alpha^2+1}}{2^{3\alpha+1}(x-1)^{3\alpha+1}} = \frac{(\sinh 1)^{2\alpha^2+1}}{2^{3\alpha+1}(x-1)^{3\alpha-1}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $3\alpha - 1 < 1$, cioè $\alpha < 2/3$.
Invece, per $x \to +\infty$, tenendo conto che $\sinh\left(\frac{1}{x}\right) \sim \frac{1}{x}$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^2\,\frac{1}{x^{2\alpha^2+1}}}{x^{6\alpha+2}} = \frac{1}{x^{2\alpha^2+6\alpha+1}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $2\alpha^2 + 6\alpha + 1 > 1$, cioè $\alpha < -3$ e $\alpha > 0$.
In conclusione, l'integrale proposto converge per $\alpha < -3$ o $0 < \alpha < 2/3$.

Esercizio 5

Osserviamo che, ponendo $t = x - 1$, ovvero $x = t + 1$, possiamo riscrivere $f(x-1) = f(t)$, dove per $x \to 0$ abbiamo $t \to -1$. Pertanto,

$$\begin{aligned}
&\text{a)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x-1)}{x^2} = \lim_{t\to -1} \frac{f(t)}{(t+1)^2} = \lim_{t\to -1} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)^2} = 0\,;\\
&\text{b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x-1)}{x^3} = \lim_{t\to -1} \frac{f(t)}{(t+1)^3} = \lim_{t\to -1} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)^3} = 4\,;\\
&\text{c)} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x-1)}{x^4} = \lim_{t\to -1^+} \frac{f(t)}{(t+1)^4} = \lim_{t\to -1^+} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)^4} = +\infty\,;\\
&\text{d)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x-1)}{x} = \lim_{t\to -1} \frac{f(t)}{(t+1)} = \lim_{t\to -1} \frac{4(t+1)^3}{(t+1)} = 0\,.
\end{aligned}$$

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si può riscrivere nella forma $(z-i)^4 = -\frac{1}{4}$, da cui si ricava

$$z = i + \sqrt[4]{-\frac{1}{4}} = i + \sqrt[4]{\frac{1}{4}\,\mathrm{e}^{i\pi}} = \begin{cases} i + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i\pi/4} = i + \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3i}{2}\,, \\[2ex] i + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i3\pi/4} = i - \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3i}{2}\,, \\[2ex] i + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i5\pi/4} = i - \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\,, \\[2ex] i + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{e}^{i7\pi/4} = i + \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{i}{2}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Osserviamo che possiamo riscrivere

$$a_n := \left[\left(1+\sinh\frac{1}{n^2}\right)^{5n^2} - \mathrm{e}^5\right] n^2 = n^2\mathrm{e}^5\left[\mathrm{e}^{5n^2\log\left(1+\sinh\frac{1}{n^2}\right)-5} - 1\right].$$

Tenendo conto che

$$5n^2\log\left(1+\sinh\frac{1}{n^2}\right) \sim 5n^2\sinh\frac{1}{n^2} \sim 5n^2\,\frac{1}{n^2} = 5\,,$$

e quindi che l'esponente $5n^2\log\left(1+\sinh\frac{1}{n^2}\right) - 5$ è infinitesimo, e ricordando che $\mathrm{e}^t - 1 \sim t$, per $t \to 0$, con $t = 5n^2\log\left(1+\sinh\frac{1}{n^2}\right) - 5$, otteniamo

$$a_n \sim n^2\mathrm{e}^5\left[5n^2\log\left(1+\sinh\frac{1}{n^2}\right) - 5\right].$$

Utilizzando, infine, lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = \sinh\frac{1}{n^2}$ e quello al terzo ordine per la funzione $x \mapsto \sinh x$, con $x = 1/n^2$, ricaviamo

$$\begin{aligned} a_n &\sim n^2\mathrm{e}^5\left[5n^2\sinh\frac{1}{n^2} - \frac{5n^2}{2}\left(\sinh\frac{1}{n^2}\right)^2 - 5\right] \\ &\sim n^2\mathrm{e}^5\left[5n^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3\right) - \frac{5n^2}{2}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{n^2}\right)^3\right)^2 - 5\right] \\ &\sim n^2\mathrm{e}^5\left[5 - \frac{5}{2n^2} - 5\right] \to -\frac{5\mathrm{e}^5}{2}\,. \end{aligned}$$

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1; -2$. Quindi, l'integrale generale dell'equazione omogenea è $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$. Inoltre, dal metodo di somiglianza, otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-x}(-x+1)$ e $y_p''(x) = A\mathrm{e}^{-x}(x-2)$. Inserendo nell'equazione completa, si ricava

$$A\mathrm{e}^{-x}(x-2) + 3A\mathrm{e}^{x}(-x+1) + 2Ax\mathrm{e}^{-x} = 2\mathrm{e}^{-x} \qquad \Longrightarrow \qquad A = 2\,.$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + 2x\mathrm{e}^{-x}$. Imponendo ora la condizione richiesta, otteniamo

$$\lim_{x\to-\infty}[y(x) - 2(x-4)\mathrm{e}^{-x}] = \lim_{x\to-\infty}[(C_1+8)\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}] = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} C_1 = -8\,, \\ C_2 = 0\,. \end{cases}$$

Quindi esiste un'unica soluzione dell'equazione differenziale soddisfacente la condizione richiesta ed è data da $y(x) = (-8+2x)\mathrm{e}^{-x}$.

Esercizio 4
Osserviamo che $f \in \mathcal{C}^0(0,1)$, quindi va studiata solo agli estremi. Per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) \sim \frac{x^{-\alpha}(\sin 1)^{\alpha^2-1}}{x} = \frac{(\sin 1)^{\alpha^2-1}}{x^{1+\alpha}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $1+\alpha < 1$, cioè $\alpha < 0$.
Invece, per $x \to 1^-$, tenendo conto che $\sin(1-x) \sim (1-x)$, si ha

$$f(x) \sim \frac{(1-x)^{\alpha^2-1}}{(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^{2-\alpha^2}}\,;$$

pertanto, l'integrale converge per $2-\alpha^2 < 1$, cioè $\alpha < -1$ o $\alpha > 1$.
In conclusione, l'integrale proposto converge per $\alpha < -1$.

Esercizio 5
Osserviamo che, ponendo $t = x+1$, ovvero $x = t-1$, possiamo riscrivere $f(x+1) = f(t)$, dove per $x \to 0$ abbiamo $t \to 1$. Pertanto,

$$\text{a)}\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x^2} = \lim_{t\to1}\frac{f(t)}{(t-1)^2} = \lim_{t\to1}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)^2} = 2\,;$$

$$\text{b)}\quad \lim_{x\to0^+}\frac{f(x+1)}{x^3} = \lim_{t\to1^+}\frac{f(t)}{(t-1)^3} = \lim_{t\to1^+}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)^3} = +\infty\,;$$

$$\text{c)}\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x^4} = \lim_{t\to1}\frac{f(t)}{(t-1)^4} = \lim_{t\to1}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)^4} = +\infty\,;$$

$$\text{d)}\quad \lim_{x\to0}\frac{f(x+1)}{x} = \lim_{t\to1}\frac{f(t)}{(t-1)} = \lim_{t\to1}\frac{2(t-1)^2}{(t-1)} = 0\,.$$