ANALISI I (h. 2.30) Appello del **8 Febbraio 2018**	**TEMA A** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Dato il numero complesso

$$z = \frac{2i}{1 + i\sqrt{3}}\,,$$

1. scriverlo in forma esponenziale o trigonometrica;
2. calcolare z^{36} .

---

2. Data la funzione $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin[\log(1 + x)]\,,$$

scrivere lo sviluppo di Mc Laurin di ordine 5 .

---

3. Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^3(x)}{1 + x^2}\,, \\ y(0) = 1/\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

---

4. Determinare insieme di definizione, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{x^2 + 1}\,.$$

5.

i) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie.
Mostrare, attraverso degli esempi espliciti, che la condizione è solo necessaria, ma non sufficiente a garantire la convergenza di una serie.

ii) **Facoltativo:** Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ due funzioni strettamente positive tali che $f(x) = o(x^2)$ e $g(x) = o(1)$ per $x \to 0$. Stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette e fornire un controesempio per quelle false:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\left[f\left(\sin(1/n)\right)\right]^2}{g(1/n)} \quad \text{converge;} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(\mathrm{e}^{1/n} - 1)}{f(n)} \quad \text{diverge;}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[4]{f(1/n)}\,\sqrt{g(1/n)} \quad \text{diverge;} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} [f(1/\sqrt{n})]^2 g(1) \quad \text{converge.}$$

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **8 Febbraio 2018**	**TEMA B** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Dato il numero complesso

$$z = \frac{2i}{1 - i\sqrt{3}}\,,$$

1. scriverlo in forma esponenziale o trigonometrica;
2. calcolare z^{24} .

---

2. Data la funzione $f : (-\infty, 1) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sinh[\log(1 - x)]\,,$$

scrivere lo sviluppo di Mc Laurin di ordine 5 .

---

3. Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y^4(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ y(0) = 1/\sqrt[3]{3}\,. \end{cases}$$

---

4. Determinare insieme di definizione, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^5 + \exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{x^4 + 1}\,.$$

5.

i) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie. Mostrare, attraverso degli esempi espliciti, che la condizione è solo necessaria, ma non sufficiente a garantire la convergenza di una serie.

ii) **Facoltativo:** Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ due funzioni strettamente positive tali che $f(x) = o(x^2)$ e $g(x) = o(1)$ per $x \to 0$. Stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette e fornire un controesempio per quelle false:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(1/n)}{\big[f\big(\sin(1/n)\big)\big]^2} \quad \text{diverge;} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[f(1/n)]^2}{g(\mathrm{e}^{1/n} - 1)} \quad \text{converge;}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{[g(1/n)]^2}{|\log[f(1/n)]|} \quad \text{converge;} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} f(1/n)[g(1)]^2 \quad \text{converge.}$$

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **8 Febbraio 2018**	**TEMA C** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Dato il numero complesso

$$z = \frac{2i}{\sqrt{3}+i}\,,$$

1. scriverlo in forma esponenziale o trigonometrica;
2. calcolare z^{48} .

---

2. Data la funzione $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sin[\log(1-x)]\,,$$

scrivere lo sviluppo di Mc Laurin di ordine 5 .

---

3. Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y^3(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,, \\ y(0) = 1/\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

---

4. Determinare insieme di definizione, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^5 - \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right)}{x^4+1}\,.$$

5.

i) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie.
Mostrare, attraverso degli esempi espliciti, che la condizione è solo necessaria, ma non sufficiente a garantire la convergenza di una serie.

ii) **Facoltativo:** Siano $f,g\in\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ due funzioni strettamente positive tali che $f(x)=o(x^2)$ e $g(x)=o(1)$ per $x\to 0$. Stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette e fornire un controesempio per quelle false:

$a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{g(1/n)}{\big[f\big(\sin(1/n)\big)\big]^2}$ diverge; $b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[f(1/n)]^2}{g(e^{1/n}-1)}$ converge;

$c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{[g(1/n)]^2}{|\log[f(1/n)]|}$ converge; $d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f(1/n)[g(1)]^2$ converge.

ANALISI I (h. 2.30) Appello del **8 Febbraio 2018**	**TEMA D** Cognome e nome (in stampatello) Corso di laurea in Ingegneria Meccanica

1. Dato il numero complesso

$$z = \frac{2i}{\sqrt{3} - i}\,, \,,$$

1. scriverlo in forma esponenziale o trigonometrica;
2. calcolare z^{36} .

---

2. Data la funzione $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sinh[\log(1 + x)]\,,$$

scrivere lo sviluppo di Mc Laurin di ordine 5 .

---

3. Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -\dfrac{y^4(x)}{1 + x^2}\,, \\ y(0) = 1/\sqrt[3]{3}\,. \end{cases}$$

---

4. Determinare insieme di definizione, limiti alla frontiera ed eventuali asintoti della funzione

$$f(x) = \frac{x^3 - \exp\left(\frac{1}{1-x^2}\right)}{x^2 + 1}\,.$$

5.

i) Enunciare e dimostrare la condizione necessaria per la convergenza delle serie.
Mostrare, attraverso degli esempi espliciti, che la condizione è solo necessaria, ma non sufficiente a garantire la convergenza di una serie.

ii) **Facoltativo:** Siano $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ due funzioni strettamente positive tali che $f(x) = o(x^2)$ e $g(x) = o(1)$ per $x \to 0$. Stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono corrette e fornire un controesempio per quelle false:

$$a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\big[f\big(\sin(1/n)\big)\big]^2}{g(1/n)} \quad \text{converge;} \qquad b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g(\mathrm{e}^{1/n} - 1)}{f(n)} \quad \text{diverge;}$$

$$c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt[4]{f(1/n)}\,\sqrt{g(1/n)} \quad \text{diverge;} \qquad d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} [f(1/\sqrt{n})]^2 g(1) \quad \text{converge.}$$