SOLUZIONI COMPITO del 8/02/2019
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Osservando che $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\mathrm{e}^{2i\pi/3}$, otteniamo

$$\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2}=\sqrt[4]{\mathrm{e}^{4i\pi/3}}=\begin{cases}\mathrm{e}^{i\pi/3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\\[2mm] \mathrm{e}^{5i\pi/6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,,\\[2mm] \mathrm{e}^{4i\pi/3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\\[2mm] \mathrm{e}^{11i\pi/6}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,.\end{cases}$$

Esercizio 2
Posto

$$a_n=\frac{\log\left[1+\sin\left(\frac{1}{n^{9\alpha^2}}\right)\right]}{\log\left[\cos\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)\right]}\,,$$

e tenendo conto che $\log(1+t)\sim t$, con $t=\sin\left(\frac{1}{n^{9\alpha^2}}\right)$ o $t=\cos\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)-1$, che $\sin t\sim t$, con $t=\frac{1}{n^{9\alpha^2}}$, e che $\cos t-1\sim-\frac{t^2}{2}$, con $t=\frac{1}{n^{4\alpha}}$, si ottiene

$$a_n\sim\frac{\sin\left(\frac{1}{n^{9\alpha^2}}\right)}{\log\left[1+\cos\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)-1\right]}\sim\frac{\frac{1}{n^{9\alpha^2}}}{\cos\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)-1}\sim\frac{\frac{1}{n^{9\alpha^2}}}{-\frac{1}{2n^{8\alpha}}}=-\frac{2}{n^{9\alpha^2-8\alpha}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $9\alpha^2-8\alpha>1$, ovvero per $\alpha>1$, mentre sarà divergente per $0<\alpha\le 1$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Se $\alpha=0$, essa si riduce semplicemente a $y''(x)=1$, che a seguito di una doppia integrazione fornisce $y(x)=x^2/2+C_1x+C_2$.
Invece, per $\alpha\neq 0$, una soluzione particolare è data da $y_p(x)=1/\alpha$ e l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2+\alpha=0$ che, per $\alpha>0$, ha due soluzioni complesse coniugate date da $\lambda=\pm i\sqrt{\alpha}$, mentre per $\alpha<0$ ha due soluzioni reali distinte date da $\lambda=\pm\sqrt{-\alpha}$. Quindi, l'integrale generale sarà

$$y(x)=\begin{cases}C_1\cos(\sqrt{\alpha}x)+C_2\sin(\sqrt{\alpha}x)+\frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha>0,\\[2mm] C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\alpha}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha}x}+\frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha<0.\end{cases}$$

Esercizio 4
Tenendo conto che

$$\sin x=\sin\left(x-\frac{5\pi}{2}+\frac{5\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)=\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)\,,$$

e ricordando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t\mapsto\cos t$, con $t=x-5\pi/2$, otteniamo che lo sviluppo richiesto è dato da

$$\begin{aligned}\sin x=\cos\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)&=\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\left(x-\frac{5\pi}{2}\right)^{2k}+o\big((x-5\pi/2)^7\big)\\ &=1-\frac{(x-5\pi/2)^2}{2}+\frac{(x-5\pi/2)^4}{4!}-\frac{(x-5\pi/2)^6}{6!}+o\big((x-5\pi/2)^7\big)\,.\end{aligned}$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè f è strettamente crescente) ed $f(0) = 0$, si ricava subito che $f(x) > 0$ per $x > 0$ ed $f(x) < 0$ per $x < 0$. Inoltre, dal Teorema di Torricelli abbiamo

$$F'(x) = -[f(x)]^2\,, \qquad F''(x) = -2f(x)f'(x)\,.$$

In particolare, si ottiene

$$F''(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x < 0; \\ = 0 & \text{per } x = 0; \\ < 0 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Pertanto, F è convessa lungo la semiretta reale negativa e concava lungo quella positiva e, quindi, $x_0 = 0$ è l'unico punto di flesso.

TEMA B

Esercizio 1
Osservando che $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{4i\pi/3}$, otteniamo

$$\sqrt[4]{\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{8i\pi/3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,, \\ \mathrm{e}^{7i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,, \\ \mathrm{e}^{5i\pi/3} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,, \\ \mathrm{e}^{13i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Posto

$$a_n = \frac{\log\left[\cosh\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}}\right)\right]}{\log\left[1+\sinh\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right]}\,,$$

e tenendo conto che $\log(1+t)\sim t$, con $t=\sinh\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$ o $t=\cosh\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}}\right)-1$, che $\sinh t\sim t$, con $t=\frac{1}{n^{3\alpha}}$, e che $\cosh t - 1 \sim \frac{t^2}{2}$, con $t=\frac{1}{n^{2\alpha^2}}$, si ottiene

$$a_n \sim \frac{\log\left[1+\cosh\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}}\right)-1\right]}{\sinh\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)} \sim \frac{\cosh\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}}\right)-1}{\frac{1}{n^{3\alpha}}} \sim \frac{\frac{1}{2n^{4\alpha^2}}}{\frac{1}{n^{3\alpha}}} = \frac{1}{2n^{4\alpha^2-3\alpha}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $4\alpha^2-3\alpha>1$, ovvero per $\alpha>1$, mentre sarà divergente per $0<\alpha\le 1$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Se $\alpha=0$, essa si riduce semplicemente a $y''(x)=-2$, che a seguito di una doppia integrazione fornisce $y(x)=-x^2+C_1x+C_2$.
Invece, per $\alpha\neq 0$, una soluzione particolare è data da $y_p(x)=2/\alpha$ e l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2-\alpha=0$ che, per $\alpha<0$, ha due soluzioni complesse coniugate date da $\lambda=\pm i\sqrt{-\alpha}$, mentre per $\alpha>0$ ha due soluzioni reali distinte date da $\lambda=\pm\sqrt{\alpha}$. Quindi, l'integrale generale sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1\cos(\sqrt{-\alpha}x)+C_2\sin(\sqrt{-\alpha}x)+\frac{2}{\alpha} & \text{se } \alpha<0, \\ C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}x}+\frac{2}{\alpha} & \text{se } \alpha>0. \end{cases}$$

Esercizio 4
Tenendo conto che

$$\cos x = \cos(x-3\pi+3\pi) = \cos(3\pi)\cos(x-3\pi) = -\cos(x-3\pi)\,,$$

e ricordando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t\mapsto\cos t$, con $t=x-3\pi$, otteniamo che lo sviluppo richiesto è dato da

$$\begin{aligned} \cos x &= -\cos(x-3\pi) = -\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\,(x-3\pi)^{2k} + o\big((x-3\pi)^7\big) \\ &= -1+\frac{(x-3\pi)^2}{2}-\frac{(x-3\pi)^4}{4!}+\frac{(x-3\pi)^6}{6!}+o\big((x-3\pi)^7\big)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè f è strettamente decrescente) ed $f(0) = 0$, si ricava subito che $f(x) < 0$ per $x > 0$ ed $f(x) > 0$ per $x < 0$. Inoltre, dal Teorema di Torricelli abbiamo

$$F'(x) = [f(x)]^4\,, \qquad F''(x) = 4[f(x)]^3 f'(x)\,.$$

In particolare, si ottiene

$$F''(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < 0; \\ = 0 & \text{per } x = 0; \\ > 0 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Pertanto, F è convessa lungo la semiretta reale positiva e concava lungo quella negativa e, quindi, $x_0 = 0$ è l'unico punto di flesso.

TEMA C

Esercizio 1

Osservando che $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{i\pi/3}$, otteniamo

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{2i\pi/3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\,, \\ \mathrm{e}^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,, \\ \mathrm{e}^{7i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\,, \\ \mathrm{e}^{5i\pi/3} = \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Posto

$$a_n = \frac{\log\left[\cosh\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)\right]}{\log\left[1+\sinh\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}}\right)\right]}\,,$$

e tenendo conto che $\log(1+t)\sim t$, con $t=\sinh\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}}\right)$ o $t=\cosh\left(\frac{1}{n^{2\alpha/2}}\right)-1$, che $\sinh t\sim t$, con $t=\frac{1}{n^{2\alpha^2}}$, e che $\cosh t - 1\sim\frac{t^2}{2}$, con $t=\frac{1}{n^{3\alpha/2}}$, si ottiene

$$a_n \sim \frac{\log\left[1+\cosh\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)-1\right]}{\sinh\left(\frac{1}{n^{2\alpha^2}}\right)} \sim \frac{\cosh\left(\frac{1}{n^{3\alpha/2}}\right)-1}{\frac{1}{n^{2\alpha^2}}} \sim \frac{\frac{1}{2n^{3\alpha}}}{\frac{1}{n^{2\alpha^2}}} = \frac{1}{2n^{3\alpha-2\alpha^2}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $3\alpha-2\alpha^2>1$, ovvero per $1/2<\alpha<1$, mentre sarà divergente per $0<\alpha\le 1/2$ oppure $\alpha\ge 1$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Se $\alpha=0$, essa si riduce semplicemente a $y''(x)=2$, che a seguito di una doppia integrazione fornisce $y(x)=x^2+C_1x+C_2$.

Invece, per $\alpha\neq 0$, una soluzione particolare è data da $y_p(x)=-2/\alpha$ e l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2-\alpha=0$ che, per $\alpha<0$, ha due soluzioni complesse coniugate date da $\lambda=\pm i\sqrt{-\alpha}$, mentre per $\alpha>0$ ha due soluzioni reali distinte date da $\lambda=\pm\sqrt{\alpha}$. Quindi, l'integrale generale sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1\cos(\sqrt{-\alpha}x)+C_2\sin(\sqrt{-\alpha}x)-\frac{2}{\alpha} & \text{se } \alpha<0, \\ C_1\mathrm{e}^{\sqrt{\alpha}x}+C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{\alpha}x}-\frac{2}{\alpha} & \text{se } \alpha>0. \end{cases}$$

Esercizio 4

Tenendo conto che

$$\cos x = \cos(x-5\pi+5\pi) = \cos(5\pi)\cos(x-5\pi) = -\cos(x-5\pi)\,,$$

e ricordando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t\mapsto\cos t$, con $t=x-5\pi$, otteniamo che lo sviluppo richiesto è dato da

$$\begin{aligned}\cos x = -\cos(x-5\pi) &= -\sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\,(x-5\pi)^{2k}+o\big((x-5\pi)^7\big) \\ &= -1+\frac{(x-5\pi)^2}{2}-\frac{(x-5\pi)^4}{4!}+\frac{(x-5\pi)^6}{6!}+o\big((x-5\pi)^7\big)\,.\end{aligned}$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè f è strettamente decrescente) ed $f(0) = 0$, si ricava subito che $f(x) < 0$ per $x > 0$ ed $f(x) > 0$ per $x < 0$. Inoltre, dal Teorema di Torricelli abbiamo

$$F'(x) = [f(x)]^4 \,, \qquad F''(x) = 4[f(x)]^3 f'(x) \,.$$

In particolare, si ottiene

$$F''(x) \begin{cases} < 0 & \text{per } x < 0; \\ = 0 & \text{per } x = 0; \\ > 0 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Pertanto, F è convessa lungo la semiretta reale positiva e concava lungo quella negativa e, quindi, $x_0 = 0$ è l'unico punto di flesso.

TEMA D

Esercizio 1
Osservando che $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{-i\pi/3}$, otteniamo

$$\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{-2i\pi/3}} = \begin{cases} \mathrm{e}^{-i\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\,, \\ \mathrm{e}^{i\pi/3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,, \\ \mathrm{e}^{5i\pi/6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\,, \\ \mathrm{e}^{4i\pi/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Posto

$$a_n = \frac{\log\left[1 + \sin\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)\right]}{\log\left[\cos\left(\frac{1}{n^{\alpha^2}}\right)\right]}\,,$$

e tenendo conto che $\log(1+t) \sim t$, con $t = \sin\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)$ o $t = \cos\left(\frac{1}{n^{\alpha^2}}\right) - 1$, che $\sin t \sim t$, con $t = \frac{1}{n^{3\alpha}}$, e che $\cos t - 1 \sim -\frac{t^2}{2}$, con $t = \frac{1}{n^{\alpha^2}}$, si ottiene

$$a_n \sim \frac{\sin\left(\frac{1}{n^{3\alpha}}\right)}{\log\left[1 + \cos\left(\frac{1}{n^{\alpha^2}}\right) - 1\right]} \sim \frac{\frac{1}{n^{3\alpha}}}{\cos\left(\frac{1}{n^{\alpha^2}}\right) - 1} \sim \frac{\frac{1}{n^{3\alpha}}}{-\frac{1}{2n^{2\alpha^2}}} = -\frac{2}{n^{3\alpha - 2\alpha^2}}\,.$$

Pertanto, la serie sarà convergente per $-2\alpha^2 + 3\alpha > 1$, ovvero per $1/2 < \alpha < 1$, mentre sarà divergente per $0 < \alpha \leq 1/2$ oppure $\alpha \geq 1$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. Se $\alpha = 0$, essa si riduce semplicemente a $y''(x) = -1$, che a seguito di una doppia integrazione fornisce $y(x) = -x^2/2 + C_1x + C_2$.
Invece, per $\alpha \neq 0$, una soluzione particolare è data da $y_p(x) = -1/\alpha$ e l'equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \alpha = 0$ che, per $\alpha > 0$, ha due soluzioni complesse coniugate date da $\lambda = \pm i\sqrt{\alpha}$, mentre per $\alpha < 0$ ha due soluzioni reali distinte date da $\lambda = \pm\sqrt{-\alpha}$. Quindi, l'integrale generale sarà

$$y(x) = \begin{cases} C_1\cos(\sqrt{\alpha}x) + C_2\sin(\sqrt{\alpha}x) - \frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha > 0, \\ C_1\mathrm{e}^{\sqrt{-\alpha}x} + C_2\mathrm{e}^{-\sqrt{-\alpha}x} - \frac{1}{\alpha} & \text{se } \alpha < 0. \end{cases}$$

Esercizio 4
Tenendo conto che

$$\sin x = \sin\left(x - \frac{9\pi}{2} + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{2}\right)\cos\left(x - \frac{9\pi}{2}\right) = \cos\left(x - \frac{9\pi}{2}\right)\,,$$

e ricordando lo sviluppo di Mc Laurin per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = x - 9\pi/2$, otteniamo che lo sviluppo richiesto è dato da

$$\begin{aligned} \sin x = \cos\left(x - \frac{9\pi}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{3}(-1)^k\frac{1}{(2k)!}\left(x - \frac{9\pi}{2}\right)^{2k} + o\big((x - 9\pi/2)^7\big) \\ &= 1 - \frac{(x - 9\pi/2)^2}{2} + \frac{(x - 9\pi/2)^4}{4!} - \frac{(x - 9\pi/2)^6}{6!} + o\big((x - 9\pi/2)^7\big)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ (cioè f è strettamente crescente) ed $f(0) = 0$, si ricava subito che $f(x) > 0$ per $x > 0$ ed $f(x) < 0$ per $x < 0$. Inoltre, dal Teorema di Torricelli abbiamo

$$F'(x) = -[f(x)]^2\,, \qquad F''(x) = -2f(x)f'(x)\,.$$

In particolare, si ottiene

$$F''(x) \begin{cases} > 0 & \text{per } x < 0; \\ = 0 & \text{per } x = 0; \\ < 0 & \text{per } x > 0. \end{cases}$$

Pertanto, F è convessa lungo la semiretta reale negativa e concava lungo quella positiva e, quindi, $x_0 = 0$ è l'unico punto di flesso.