SOLUZIONI COMPITO dello 08/06/2010
ANALISI 1 - MECCANICA + ELETTRICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini positivi. Utilizzando la formula di Stirling per $n!$ e in seguito il criterio della radice, si ottiene

$$\sqrt[n]{a_n} := \sqrt[n]{\frac{n!\,2^n}{n^{2\alpha n}}} \sim \sqrt[n]{\frac{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,2^n}{n^{2\alpha n}}} \sim \frac{n\,2}{n^{2\alpha}\mathrm{e}} = \frac{2}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{n^{2\alpha-1}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha > 1/2; \\ \frac{2}{\mathrm{e}} < 1 & \text{se } \alpha = 1/2; \\ +\infty & \text{se } \alpha < 1/2. \end{cases}$$

Pertanto, la serie proposta converge per $\alpha \geq 1/2$.
Osserviamo che l'esercizio poteva essere svolto anche senza far ricorso alla formula di Stirling, ma applicando il criterio del rapporto. Infatti,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{2\alpha(n+1)}}\,\frac{n^{2\alpha n}}{n!\,2^n} = \frac{2(n+1)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha(n+1)} n^{2\alpha}} \sim \frac{2n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2\alpha} n^{2\alpha}} \sim \frac{2}{\mathrm{e}^{2\alpha} n^{2\alpha-1}}\,,$$

e quest'ultima successione ha il medesimo comportamento analizzato sopra.

Esercizio 2

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2$. Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x}$. Poiché $\lambda = 2$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = x(Ax+B)\mathrm{e}^{2x}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale completa, si ottiene

$$\mathrm{e}^{2x}[4Ax^2 + (8A+4B)x + 2A + 4B - 4Ax^2 - 4Bx] = x\mathrm{e}^{2x}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} 8A = 1; \\ 2A + 4B = 0; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 1/8; \\ B = -1/16. \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa sarà della forma $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{16}x\right)\mathrm{e}^{2x}$.

Esercizio 3

L'insieme delle primitive delle funzioni assegnate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, è costituito dall'integrale indefinito. L'espressione esplicita di tale integrale si ottiene integrando per parti ed è fornita da

$$F_\alpha^C(x) = \int x\sin(\alpha x)\,dx = -\frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \int \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha}\,dx = -\frac{x\cos(\alpha x)}{\alpha} + \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha^2} + C\,.$$

Pertanto, imponendo le condizione $F_\alpha^C(0) = -1$ ed $F_\alpha^C(\frac{\pi}{2\alpha}) = 3$, si ricava

$$\begin{cases} C = -1; \\ \dfrac{1}{\alpha^2} - 1 = 3; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C = -1; \\ \dfrac{1}{\alpha^2} = 4; \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} C = -1; \\ \alpha = \pm 1/2. \end{cases}$$

Quindi le primitive richieste sono esattamente due e sono date da

$$F_{1/2}(x) = -2x\cos(x/2) + 4\sin(x/2) - 1\,; \qquad F_{-1/2}(x) = 2x\cos(x/2) - 4\sin(x/2) - 1\,.$$

Esercizio 4

Ponendo $w = z - i$, l'equazione proposta si riconduce all'equazione $w^4 = -16$, cioè al calcolo delle 4 radici quarte complesse di -16. Si ricava, quindi,

$$w = \sqrt[4]{-16} = \sqrt[4]{16e^{i\pi}} = 2e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \ (k = 0, 1, 2, 3) \ = \begin{cases} 2[\sin(\pi/4) + i\cos(\pi/4)] = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; \\ 2[\sin(3\pi/4) + i\cos(3\pi/4)] = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}; \\ 2[\sin(5\pi/4) + i\cos(5\pi/4)] = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}; \\ 2[\sin(7\pi/4) + i\cos(7\pi/4)] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$z = w + i = \begin{cases} \sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 1); \\ -\sqrt{2} + i(\sqrt{2} + 1); \\ -\sqrt{2} - i(\sqrt{2} - 1); \\ \sqrt{2} - i(\sqrt{2} - 1). \end{cases}$$

Esercizio 5

Osserviamo che la risposta $a)$ è falsa, infatti basta considerare la funzione $f(x) = 3x^5 + 2x^7 + x^8$, che soddisfa le condizioni richieste, ma non è dispari.
Anche la risposta $b)$ è falsa, poiché $f(x^2) = 3x^{10} + 2x^{14} + o(x^{14})$, mentre $[f(x)]^2 = 9x^{10} + 12x^{12} + 4x^{14} + o(x^{12}) = 9x^{10} + 12x^{12} + o(x^{12})$, quindi $3f(x^2) - [f(x)]^2 = 9x^{10} + 6x^{14} + o(x^{14}) - 9x^{10} - 12x^{12} + o(x^{12}) \sim -12x^{12}$.
Le risposte $c)$ e $d)$, invece, sono vere, in quanto, nel primo caso $f(1/x) \sim 3/x^5$, per $x \to +\infty$, e quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio converge; mentre nel secondo caso si ha $3 = f^{(5)}(0)/5!$ da cui $f^{(5)}(0) = 5!\,3 = 360$.

Esercizio 6

Il campo di esistenza D della funzione proposta è determinato dalla condizione $xy^2 + x^2y > 0$, ovvero $xy(y + x) > 0$. Osserviamo che la condizione $xy > 0$ è soddisfatta nel primo e terzo quadrante, mentre la condizione $x + y > 0$ equivale a $y > -x$ ed è soddisfatta nella regione sopra la bisettrice secondaria (cioè la bisettrice del secondo e quarto quadrante). Pertanto, il dominio D sarà dato dalla regione di piano costituito dal primo quadrante e dalla porzione del secondo e quarto quadrante al di sotto della bisettrice secondaria, ovvero

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, 0 < y < -x\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y < -x\}.$$

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che la serie proposta è una serie a termini positivi. Utilizzando la formula di Stirling per $n!$ e in seguito il criterio della radice, si ottiene

$$\sqrt[n]{a_n} := \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha n/2}}{n!\,3^n}} \sim \sqrt[n]{\frac{n^{\alpha n/2}}{n^n \mathrm{e}^{-n}\sqrt{2\pi n}\,3^n}} \sim \frac{n^{\alpha/2}\mathrm{e}}{n\,3} = \frac{\mathrm{e}}{3}\,\frac{1}{n^{1-\alpha/2}} \to \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 2; \\ \frac{\mathrm{e}}{3} < 1 & \text{se } \alpha = 2; \\ +\infty & \text{se } \alpha > 2. \end{cases}$$

Pertanto, la serie proposta converge per $\alpha \leq 2$.
Osserviamo che l'esercizio poteva essere svolto anche senza far ricorso alla formula di Stirling, ma applicando il criterio del rapporto. Infatti,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} := \frac{(n+1)^{\alpha(n+1)/2}}{(n+1)!\,3^{n+1}}\,\frac{n!\,3^n}{n^{\alpha n/2}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha(n+1)/2} n^{\alpha/2}}{3(n+1)} \sim \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha n/2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha/2} n^{\alpha/2}}{3n} \sim \frac{\mathrm{e}^{\alpha/2}}{3n^{1-\alpha/2}}\,,$$

e quest'ultima successione ha il medesimo comportamento analizzato sopra.

Esercizio 2

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica associata è data da $4\lambda^2 - 1 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 1/2$. Quindi l'integrale generale dell'omogenea associata è dato da $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{x/2} + C_2\mathrm{e}^{-x/2}$. Poiché $\lambda = 1/2$ è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza si ricava che la soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = x(Ax+B)\mathrm{e}^{x/2}$. Derivando due volte e sostituendo nell'equazione differenziale completa, si ottiene

$$\mathrm{e}^{x/2}[Ax^2 + (8A+B)x + 8A + 4B - Ax^2 - Bx] = x\mathrm{e}^{x/2}\,,$$

da cui

$$\begin{cases} 8A = 1; \\ 8A + 4B = 0; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} A = 1/8; \\ B = -1/4. \end{cases}$$

Quindi, l'integrale generale dell'equazione completa sarà della forma $y(x) = C_1\mathrm{e}^{x/2} + C_2\mathrm{e}^{-x/2} + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x\right)\mathrm{e}^{x/2}$.

Esercizio 3

L'insieme delle primitive delle funzioni assegnate, al variare di $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, è costituito dall'integrale indefinito. L'espressione esplicita di tale integrale si ottiene integrando per parti ed è fornita da

$$F_\alpha^C(x) = \int x\cos(\alpha x)\,dx = \frac{x\sin(\alpha x)}{\alpha} - \int \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha}\,dx = \frac{x\sin(\alpha x)}{\alpha} + \frac{\cos(\alpha x)}{\alpha^2} + C\,.$$

Pertanto, imponendo le condizione $F_\alpha^C(0) = 1$ ed $F_\alpha^C(\frac{\pi}{\alpha}) = -1$, si ricava

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\alpha^2} + C = 1; \\ -\dfrac{1}{\alpha^2} + C = -1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C = 0; \\ \dfrac{1}{\alpha^2} = 1; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} C = 0; \\ \alpha = \pm 1. \end{cases}$$

Quindi la primitiva richiesta è esattamente una ed è data da

$$F_1(x) = x\sin x + \cos x = -x\sin(-x) + \cos(-x) = F_{-1}(x)\,.$$

Esercizio 4

Ponendo $w = z + 2i$, l'equazione proposta si riconduce all'equazione $w^4 = -81$, cioè al calcolo delle 4 radici quarte complesse di -81. Si ricava, quindi,

$$w = \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81 e^{i\pi}} = 3e^{i\frac{\pi+2k\pi}{4}} \ (k = 0,1,2,3) \ = \begin{cases} 3[\sin(\pi/4) + i\cos(\pi/4)] = 3/\sqrt{2} + 3i/\sqrt{2}; \\ 3[\sin(3\pi/4) + i\cos(3\pi/4)] = -3/\sqrt{2} + 3i/\sqrt{2}; \\ 3[\sin(5\pi/4) + i\cos(5\pi/4)] = -3/\sqrt{2} - 3i/\sqrt{2}; \\ 3[\sin(7\pi/4) + i\cos(7\pi/4)] = 3/\sqrt{2} - 3i/\sqrt{2}. \end{cases}$$

Quindi

$$z = w - 2i = \begin{cases} 3/\sqrt{2} + i(3/\sqrt{2} - 2); \\ -3/\sqrt{2} + i(3/\sqrt{2} - 2); \\ -3/\sqrt{2} - i(3/\sqrt{2} + 2); \\ 3/\sqrt{2} - i(3/\sqrt{2} + 2). \end{cases}$$

Esercizio 5

Osserviamo che la risposta $a)$ è falsa, poiché $f(x^2) = 4x^8 + x^{12} + o(x^{12})$, mentre $[f(x)]^2 = 16x^8 + 8x^{10} + x^{12} + o(x^{10}) = 16x^8 + 8x^{10} + o(x^{10})$, quindi $4f(x^2) - [f(x)]^2 = 16x^8 + 4x^{12} + o(x^{14}) - 16x^8 + 8x^{10} + o(x^{10}) \sim 8x^{10}$. Anche la risposta $c)$ è falsa, infatti basta considerare la funzione $f(x) = 4x^4 + x^6 + x^7$, che soddisfa le condizioni richieste, ma non è pari.

Le risposte $b)$ e $d)$, invece, sono vere, in quanto, nel primo caso $f(1/x) \sim 4/x^4$, per $x \to +\infty$, e quindi, per il criterio del confronto asintotico, l'integrale improprio converge; mentre nel secondo caso si ha $1 = f^{(6)}(0)/6!$ da cui $f^{(6)}(0) = 6! = 720$.

Esercizio 6

Il campo di esistenza D della funzione proposta è determinato dalla condizione $xy^2 + x^2y > 0$, ovvero $xy(y + x) > 0$. Osserviamo che la condizione $xy > 0$ è soddisfatta nel primo e terzo quadrante, mentre la condizione $x + y > 0$ equivale a $y > -x$ ed è soddisfatta nella regione sopra la bisettrice secondaria (cioè la bisettrice del secondo e quarto quadrante). Pertanto, il dominio D sarà dato dalla regione di piano costituito dal primo quadrante e dalla porzione del secondo e quarto quadrante al di sotto della bisettrice secondaria, ovvero

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y > 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < 0, 0 < y < -x\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x > 0, y < -x\}.$$