SOLUZIONI APPELLO del 08/09/2015
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA - ENERGETICA

TEMA A

Esercizio 1

Dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, valida anche in $\mathbb{C}$, otteniamo

$$z = \frac{2 + \sqrt{4 - 4 - 4\lambda^2}}{4} = \frac{1 \pm i|\lambda|}{2}\,.$$

Quindi la soluzione cercata si avrà se e solo se $\lambda = \pm\sqrt{3}$. In tal caso, si hanno le due soluzioni

$$z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(\pi/3) + i\sin(\pi/3) = \mathrm{e}^{i\pi/3}\,,$$
$$z_2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos(-\pi/3) + i\sin(-\pi/3) = \mathrm{e}^{-i\pi/3}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è continua e positiva in $[0, 1/2)$; pertanto, al fine di stablire se l'integrale improprio proposto converge, dobbiamo studiare il comportamento di f solo per $x \to 1/2^-$. Riscrivendo $\log(2 - 2x) = \log[1 + (1 - 2x)]$ e ricordando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1 + t)$ e quello secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 1 - 2x$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-2x)^{1/3}\left[\frac{1}{2}(1-2x)^2\right]^{1/8}} = \frac{C}{(1-2x)^{1/3}(1-2x)^{1/4}} = \frac{C}{(1-2x)^{7/12}}\,,$$

che risulta essere convergente per confronto con l'iperbole di esponente $p = 7/12 < 1$. Quindi l'integrale proposto converge.

Esercizio 3

Osservando che, per $x \to 1$, $\sqrt{1 + \log x^2} - 1 \to 0$ e $\log x^2 = 2\log[1 + (x - 1)] \to 0$, e ricordando che, per $t \to 0$, $\sin t \sim t$, con $t = \sqrt{1 + \log x^2} - 1$, $\sqrt{1 + t} - 1 \sim \frac{1}{2}t$, con $t = \log x^2$, $\log(1 + t) \sim t$, con $t = x - 1$, e $1 - \cos t \sim \frac{1}{2}t^2$, con $t = \sqrt{x - 1}$, otteniamo

$$\frac{\sin(\sqrt{1+\log x^2} - 1)}{1 - \cos\sqrt{x-1}} \sim \frac{\sqrt{1+\log x^2} - 1}{\frac{1}{2}(\sqrt{x-1})^2} \sim \frac{\frac{1}{2}\,2\log[1+(x-1)]}{\frac{1}{2}(x-1)} \sim \frac{2(x-1)}{(x-1)} \to 2\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica ad essa associata è $\lambda^2 + 4 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x)$. Osservando, inoltre, che $\lambda = 1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^x$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa ricaviamo $y'(x) = (Ax + B + A)\mathrm{e}^x$, $y''(x) = (Ax + B + 2A)\mathrm{e}^x$ e

$$(Ax + B + 2A)\mathrm{e}^x + 4(Ax + B)\mathrm{e}^x = 2x\mathrm{e}^x \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A + 4A = 2\,, \\ 2A + B + 4B = 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} A = 2/5\,, \\ B = -4/25\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione particolare sarà $y_p(x) = \left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{25}\right)\mathrm{e}^x$ e l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(2x) + C_2\sin(2x) + (2x/5 - 4/25)\mathrm{e}^x$.

Esercizio 5

Innanzitutto osserviamo che la funzione $h(x) := x|x|$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; infatti, la continuità segue dal fatto che essa è prodotto dell'identità e del modulo, che sono funzioni continue, mentre la derivabilità e la continuità della derivata si ottengono facilmente tenendo conto che

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad h'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0, \\ -2x & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \text{e} \lim_{x \to 0^\pm} h'(x) = 0.$$

Pertanto, le affermazioni **a)** e **b)** sono vere, in quanto f è somma di funzioni di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Invece, l'affermazione **c)** è falsa, in quanto dalle ipotesi ricaviamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [-x^2 - g(x)] = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \inf_{\mathbb{R}} f = -\infty\,.$$

Infine, l'affermazione **d)** è vera poiché, per $x \to 0^+$, $f(x) \sim x^2 - x^4 \sim x^2 > 0$ ed $f(x) \to 0$, quindi per continuità $f(0) = 0$, f è positiva in un intorno destro dell'origine, f è negativa per $x < 0$ ed, inoltre, per ipotesi, $f(x) \to 0^+$ per $x \to +\infty$. Pertanto, in un intorno destro dell'origine f cresce, mentre all'infinito è decrescente, quindi avrà necessariamente almeno un punto di massimo assoluto in $(0, +\infty)$.

TEMA B

Esercizio 1

Dalla formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, valida anche in $\mathbb{C}$, otteniamo

$$z = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{12 - 12 - 8\lambda^2}}{4} = \frac{\sqrt{3} \pm i\sqrt{2}|\lambda|}{2}\,.$$

Quindi la soluzione cercata si avrà se e solo se $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$. In tal caso, si hanno le due soluzioni

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = \cos(\pi/6) + i\sin(\pi/6) = \mathrm{e}^{i\pi/6}\,,$$
$$z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} = \cos(-\pi/6) + i\sin(-\pi/6) = \mathrm{e}^{-i\pi/6}\,.$$

Esercizio 2

Innanzitutto osserviamo che la funzione integranda è continua e positiva in $[0, 1/4)$; pertanto, al fine di stablire se l'integrale improprio proposto converge, dobbiamo studiare il comportamento di f solo per $x \to 1/4^-$. Riscrivendo $\log(2-4x) = \log[1 + (1-4x)]$ e ricordando lo sviluppo di Mc Laurin al primo ordine per la funzione $t \mapsto \log(1+t)$ e quello secondo ordine per la funzione $t \mapsto \cos t$, con $t = 1 - 4x$, otteniamo

$$f(x) \sim \frac{1}{(1-4x)^{2/3}\left[\frac{1}{2}(1-4x)^2\right]^{1/4}} = \frac{C}{(1-4x)^{2/3}(1-4x)^{1/2}} = \frac{C}{(1-4x)^{7/6}}\,,$$

che risulta essere divergente per confronto con l'iperbole di esponente $p = 7/6 > 1$. Quindi l'integrale proposto diverge.

Esercizio 3

Osservando che

$$\log[\cos(2-x)] = \log\left[1 + (\cos(2-x) - 1)\right]$$

e che per $x \to 2$, $\cos(2-x) - 1 \to 0$ e $\sin^3(2-x) \to 0$, e ricordando che, per $t \to 0$, $\log(1+t) \sim t$, con $t = \cos(2-x) - 1$, $\cos t - 1 \sim -\frac{1}{2}t^2$, con $t = (2-x)$, $\sqrt{1+t} - 1 \sim \frac{1}{2}t$, con $t = \sin^3(2-x)$ e $\sin t \sim t$, con $t = 2 - x$, otteniamo

$$\frac{\log[\cos(2-x)]}{\left[\sqrt{1+\sin^3(2-x)} - 1\right]^{2/3}} \sim \frac{\cos(2-x) - 1}{\left[\frac{1}{2}\sin^3(2-x)\right]^{2/3}} \sim -\frac{\frac{1}{2}(2-x)^2}{\left[\frac{1}{2}(2-x)^3\right]^{2/3}} \sim -\frac{(2-x)^2}{2^{1/3}(2-x)^2} \to -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\,.$$

Esercizio 4

Innanzitutto, osserviamo che l'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti e non omogenea. L'equazione caratteristica ad essa associata è $\lambda^2 + 9 = 0$ che ha come soluzioni $\lambda = \pm 3i$. Pertanto, l'integrale generale dell'omogenea associata sarà $y_o(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x)$. Osservando, inoltre, che $\lambda = -1$ non è soluzione dell'equazione caratteristica, dal metodo di somiglianza otteniamo che una soluzione particolare sarà della forma $y_p(x) = (Ax + B)\mathrm{e}^{-x}$. Derivando due volte ed inserendo nell'equazione completa ricaviamo $y'(x) = (-Ax - B + A)\mathrm{e}^{-x}$, $y''(x) = (Ax + B - 2A)\mathrm{e}^{-x}$ e

$$(Ax + B - 2A)\mathrm{e}^{-x} + 9(Ax+B)\mathrm{e}^{-x} = -x\mathrm{e}^{-x} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} A + 9A = -1\,, \\ -2A + B + 9B = 0\,, \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} A = -1/10\,, \\ B = -1/50\,. \end{cases}$$

Pertanto, la soluzione particolare sarà $y_p(x) = \left(-\frac{1}{10}x - \frac{1}{50}\right)\mathrm{e}^{x}$ e l'integrale generale dell'equazione proposta sarà $y(x) = C_1\cos(3x) + C_2\sin(3x) - (x/10 + 1/50)\mathrm{e}^{-x}$.

Esercizio 5

Innanzitutto osserviamo che la funzione $h(x) := x|x|$ è di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$; infatti, la continuità segue dal fatto che essa è prodotto dell'identità e del modulo, che sono funzioni continue, mentre la derivabilità e la continuità della derivata si ottengono facilmente tenendo conto che

$$h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \geq 0, \\ -x^2 & \text{se } x < 0, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad h'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x > 0, \\ -2x & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad \text{e} \lim_{x \to 0^{\pm}} h'(x) = 0.$$

Pertanto, le affermazioni **a)** e **b)** sono vere, in quanto f è somma di funzioni di classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Invece, l'affermazione **c)** è falsa, in quanto dalle ipotesi ricaviamo

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} [-x^2 - g(x)] = -\infty \qquad \Longrightarrow \qquad \inf_{\mathbb{R}} f = -\infty\,.$$

Infine, l'affermazione **d)** è vera poiché, per $x \to 0^+$, $f(x) \sim x^2 - x^4 \sim x^2 > 0$ ed $f(x) \to 0$, quindi per continuità $f(0) = 0$, f è positiva in un intorno destro dell'origine, f è negativa per $x < 0$ ed, inoltre, per ipotesi, $f(x) \to 0^+$ per $x \to +\infty$. Pertanto, in un intorno destro dell'origine f cresce, mentre all'infinito è decrescente, quindi avrà necessariamente almeno un punto di massimo assoluto in $(0, +\infty)$.