SOLUZIONI

Esercizio 1

Utilizzando la formula risolutiva delle equazioni lineari, con $a(x) = -3$ e $b(x) = 2x$, si ottiene

$$y(x) = \mathrm{e}^{3x} \int_0^x 2t \ \exp\left(-\int_0^t 3 \ ds\right) \ dt = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{9}\mathrm{e}^{3x} - \frac{2}{9} \ .$$

Esercizio 2

Poiché $\phi'(t) = (2, 2t, \mathrm{e}^t)$, si ottiene

$$\vec{T}(0) = \frac{(2,0,1)}{\sqrt{5}} \ .$$

Esercizio 3

Poiché $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3 + \mathrm{e}^{x-y}$, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 3 + \mathrm{e} \ .$$

Esercizio 4

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(1,1)$, cioè $x = 1+r\cos\theta$, $y = 1+r\sin\theta$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{(x-1)^2(y-1)^7}{[(x-1)^2+(y-1)^2]^{5/2}} = \lim_{r\to 0^+} \frac{r^9\cos^2\theta\sin^7\theta}{r^5} = 0 \ .$$

Esercizio 5

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, cioè $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, si ottiene

$$\iint_{\tilde{E}} \frac{r^2\sin\theta \ \mathrm{e}^{r\cos\theta}}{r} \ dr \ d\theta$$

dove $\tilde{E} = \{(r,\theta) \in I\!R^+ \times (0,2\pi) \ : \ 1 < r < 2 \ , \ \pi/4 < \theta < 2\pi/3\}$. Quindi, l'integrale proposto diviene

$$\int_1^2 \left(\int_{\pi/4}^{2\pi/3} r\sin\theta \ \mathrm{e}^{r\cos\theta} \ d\theta\right) \ dr = -\int_1^2 \left(\mathrm{e}^{r\cos\theta}\Big|_{\pi/4}^{2\pi/3}\right) \ dr = -\int_1^2 \left(\mathrm{e}^{-r/2} - \mathrm{e}^{r/\sqrt{2}}\right) \ dr$$

$$= \left(2\mathrm{e}^{-r/2} + \sqrt{2}\mathrm{e}^{r/\sqrt{2}}\right)\Big|_1^2 = 2\mathrm{e}^{-1} + \sqrt{2}\mathrm{e}^{\sqrt{2}} - 2\mathrm{e}^{-1/2} - \sqrt{2}\mathrm{e}^{1/\sqrt{2}} \ .$$

Esercizio 6

Osserviamo che f è nulla ristretta agli assi cartesiani, pertanto si ottiene subito che $\nabla f(0,0) = (0,0)$. A questo punto, per stabilire se f è differenziabile nell'origine, dobbiamo verificare se

$$(*) \qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \ .$$

Osserviamo che, per $(h,k) \to (0,0)$, si ha

$$0 \le \frac{|f(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \sim \frac{|h^5k^4|}{h^6+k^8}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{|h|^2}{2}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \frac{|h|^2}{2|h|} = \frac{|h|}{2} \to 0$$

dove la seconda disuguaglianza è conseguenza di

$$2|h^3k^4| \le h^6 + k^8 \ ,$$

e nella terza disuguaglianza si è minorato il denominatore, eliminando il termine k^2. Pertanto, dal Teorema del confronto, si ottiene che $(*)$ è verificata e, quindi, f è differenziabile nell'origine; conseguentemente essa è anche continua in $(0,0)$.