10 GENNAIO 2003 — SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1.

-
$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(3x^2 - 2x - 8) \; ; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = -4/3, 2 \; ;$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{per } -4/3 < x < 2 \; , \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } -2 < x < -4/3 \text{ e } 2 < x < 3 \; .$$

Pertanto, $x = -4/3, 3$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = -2, 2$ sono punti di massimo relativo, per la funzione f nell'intervallo considerato. Poiché $g(x) = |f(x)|$ e $f(x) < 0$ per $x \in (-2, 2/3)$, si ottiene che $x = -4/3, 2$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = -2, 2/3, 3$ sono punti di minimo relativo, per la funzione g nell'intervallo considerato.

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$, inoltre $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x < -2,\ x > 2/3, \qquad f(x) < 0 \quad \text{per } -2 < x < 2/3, \qquad f(x) = 0 \quad \text{per } x = -2, 2/3 \; ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2\mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad y = 0 \text{ è asinototo orizzontale per } x \to +\infty \; ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2\mathrm{e}^{-x} = +\infty \qquad \text{non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to -\infty \; ;$$

$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(3x^2 - 2x - 8) \; , \qquad f'(x) = 0 \ \text{ per } x = -4/3, 2 \; ;$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per} \quad -4/3 < x < 2 \; , \quad f \text{ è crescente} \; ;$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per} \ \ x < -4/3,\ x > 2 \; , \quad f \text{ è decrescente} \; ;$$

$$x = -4/3 \ \text{ è punto di minimo assoluto} \; , \qquad x = 2 \ \text{ è punto di massimo relativo} \; ;$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(3x^2 - 8x - 6) \; , \qquad f''(x) = 0 \ \text{ per } x = \frac{4 \pm \sqrt{34}}{3} \; ;$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad \frac{4 - \sqrt{34}}{3} < x < \frac{4 + \sqrt{34}}{3} \; , \quad f \text{ è concava} \; ;$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per} \ \ x < \frac{4 - \sqrt{34}}{3},\ x > \frac{4 + \sqrt{34}}{3} \; , \quad f \text{ è convessa} \; ;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{34}}{3} \ \text{ sono punti di flesso} \; .$$

Osservando che

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \text{ ovvero per } \ x \leq -2,\ x \geq 2/3 \; , \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \text{ ovvero per } \ -2 < x < 2/3 \; , \end{cases}$$

il grafico di g si ottiene da quello di f, semplicemente ribaltando quest'ultimo nell'intervallo $(-2, 2/3)$, cioè dove f è negativa. Pertanto, $x = -2, 2/3$ risulteranno essere punti angolosi di minimo assoluto per g, mentre $x = -4/3, 2$ saranno punti di massimo relativo. Per completezza, osserviamo che $g(-4/3) = 4\mathrm{e}^{4/3}$ ed $g(2) = 16\mathrm{e}^{-2}$; pertanto $g(-4/3) > g(2)$. Infine, $x = \frac{4\pm\sqrt{34}}{3}$ sono punti di flesso. Il grafico è

Esercizio 2.

- La funzione proposta è continua su tutto $I\!R^2$, in quanto composizione di funzioni continue in tutto il piano. Dalle regole di derivazione, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,1) = \frac{1}{5}x^{-4/5}y^{3/5}\Big|_{(x,y)=(2,1)} = \frac{1}{5}\,2^{-4/5} \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,1) = \frac{3}{5}x^{1/5}y^{-2/5}\Big|_{(x,y)=(2,1)} = \frac{3}{5}\,2^{1/5} \ .$$

- Per stabilire se f è differenziabile nell'origine, bisogna innanzitutto calcolarne le derivate parziali in $(0,0)$. Osservando che la funzione proposta è identicamente nulla lungo gli assi coordinati, si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \ .$$

D'altra parte, f non risulta essere differenziabile, in quanto, effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[5]{hk^3}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{\rho^4\cos\theta\sin^3\theta}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{\cos\theta\sin^3\theta}}{\rho^{1/5}} \neq 0 \ .$$

Infine, poiché f è differenziabile in ogni punto non appartenente agli assi coordinati, in quanto composizione di funzioni differenziabili, da un noto teorema, ricaviamo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,1) = \nabla f(2,1)\cdot\vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(2,1)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(2,1)v_2 = \frac{1}{5}\,2^{-4/5}v_1 + \frac{3}{5}\,2^{1/5}v_2 \ ,$$

ove si è posto $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Esercizio 3.

Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$, ed osservando che $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$ e $-i = e^{-i\pi/2}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\frac{\rho^3 e^{i\theta}}{\rho e^{-i\theta}} = e^{-i\pi/2} \qquad \text{da cui} \qquad \rho^2 e^{2i\theta} = e^{-i\pi/2} \ .$$

Eguagliando i moduli e gli argomenti, a meno di multipli di 2π, nella precedente espressione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \ , \\ 2\theta = -\pi/2 + 2k\pi \quad k\in\mathbf{Z} \ , \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \rho = 1 \ , \\ \theta = -\pi/4 + k\pi \quad k\in\mathbf{Z} \ . \end{cases}$$

Riscrivendo le soluzioni trovate in forma algebrica, si ricavano le due soluzioni

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Esercizio 4.

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare omogenea del secondo ordine, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 4\pi^2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm 2i\pi$. Pertanto, l'integrale generale sarà

$$y(x) = C_1\cos(2\pi x) + C_2\sin(2\pi x) \ .$$

Imponendo le condizioni $y(0) = y(2) = 0$, si ricava $C_1 = 0$ e $C_2 \in I\!R$, da cui si ottengono le infinite soluzioni $y(x) = C_2\sin(2\pi x)$.

Domanda 1.

- Sia $f : [a, b] \to I\!R$ una funzione assegnata e sia x_0 un punto dell'intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0, allora f è anche continua in x_0.
  Osserviamo che non vale il viceversa, cioè la continuità in un punto non implica, in generale, la derivabilità in tale punto.
- Per la dimostrazione della precedente proprietà, vedere libro di testo.
  Considerando, ad esempio, la funzione $f : [-1, 1] \to I\!R$, definita da $f(x) = |x|$, si osserva che essa è continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile, in quanto tale funzione presenta in $x_0 = 0$ un punto angoloso.

Domanda 2.

- Sia $f : [a, b] \to I\!R$ un'assegnata funzione continua e sia $c \in [a, b]$. Allora, la funzione integrale definita da
$$F(x) = \int_c^x f(t)\ dt \qquad \forall x \in [a, b]$$
  è derivabile in $[a, b]$ e vale la relazione $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$.
- Per la dimostrazione del precedente teorema, vedere libro di testo.

10 GENNAIO 2003 — SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1.

-
$$f'(x) = \mathrm{e}^x(3x^2 + 2x - 8)\ ; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = -2, 4/3\ ;$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{per } -2 < x < 4/3\ , \qquad f'(x) > 0 \quad \text{per } -3 < x < -2 \text{ e } 4/3 < x < 2\ .$$

Pertanto, $x = -3, 4/3$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = -2, 2$ sono punti di massimo relativo, per la funzione f nell'intervallo considerato. Poiché $g(x) = -|f(x)|$ e $f(x) > 0$ per $x < -2/3$ e $x > 2$, si ottiene che $x = -3, -2/3, 2$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = -2, 4/3$ sono punti di minimo relativo, per la funzione g nell'intervallo considerato.

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$, inoltre $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x < -2/3,\ x > 2, \qquad f(x) < 0 \quad \text{per } -2/3 < x < 2, \qquad f(x) = 0 \quad \text{per } x = -2/3, 2\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2\mathrm{e}^x = 0 \qquad y = 0 \text{ è asinototo orizzontale per } x \to -\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2\mathrm{e}^x = +\infty \qquad \text{non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to +\infty\ ;$$

$$f'(x) = \mathrm{e}^x(3x^2 + 2x - 8)\ , \qquad f'(x) = 0 \ \text{ per } x = -2, 4/3\ ;$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } \ x < -2,\ x > 4/3\ , \quad f \text{ è crescente ;}$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } \ -2 < x < 4/3\ , \quad f \text{ è decrescente ;}$$

$$x = 4/3 \ \text{ è punto di minimo assoluto}\ , \qquad x = -2 \ \text{ è punto di massimo relativo ;}$$

$$f''(x) = \mathrm{e}^x(3x^2 + 8x - 6)\ , \qquad f''(x) = 0 \ \text{ per } x = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{3}\ ;$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{per } \ \frac{-4 - \sqrt{34}}{3} < x < \frac{-4 + \sqrt{34}}{3}\ , \quad f \text{ è concava ;}$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per } \ x < \frac{-4 - \sqrt{34}}{3},\ x > \frac{-4 + \sqrt{34}}{3}\ , \quad f \text{ è convessa ;}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{3} \ \text{ sono punti di flesso}\ .$$

Osservando che

$$g(x) = -|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) > 0, \text{ ovvero per } \ x > -2/3,\ x < 2\ , \\ f(x) & \text{se } f(x) < 0, \text{ ovvero per } \ -2/3 \le x \le 2\ , \end{cases}$$

il grafico di g si ottiene da quello di f, semplicemente ribaltando quest'ultimo negli intervalli $(-\infty, -2/3)$ e $(2, +\infty)$, cioè dove f è positiva. Pertanto, $x = -2/3, 2$ risulteranno essere punti angolosi di massimo assoluto per g, mentre $x = -2, 4/3$ saranno punti di minimo relativo. Per completezza, osserviamo che

$g(4/3) = -4e^{4/3}$ ed $g(-2) = -16e^{-2}$; pertanto $g(4/3) < g(-2)$. Infine, $x = \frac{-4\pm\sqrt{34}}{3}$ sono punti di flesso. Il grafico è

Esercizio 2.

- La funzione proposta è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, in quanto composizione di funzioni continue in tutto il piano. Dalle regole di derivazione, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{2}{3}x^{-1/3}y^{1/3}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = \frac{2}{3}\,2^{1/3} \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{1}{3}x^{2/3}y^{-2/3}\Big|_{(x,y)=(1,2)} = \frac{1}{3}\,2^{-2/3} \ .$$

- Per stabilire se f è differenziabile nell'origine, bisogna innanzitutto calcolarne le derivate parziali in $(0,0)$. Osservando che la funzione proposta è identicamente nulla lungo gli assi coordinati, si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \ .$$

D'altra parte, f non risulta essere differenziabile, in quanto, effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{h^2k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \sqrt[3]{\cos^2\theta\sin\theta} \neq 0 \ .$$

Infine, poiché f è differenziabile in ogni punto non appartenente agli assi coordinati, in quanto composizione di funzioni differenziabili, da un noto teorema, ricaviamo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot\vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,2)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,2)v_2 = \frac{2}{3}\,2^{1/3}v_1 + \frac{1}{3}\,2^{-2/3}v_2 \ ,$$

ove si è posto $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Esercizio 3.

Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$, ed osservando che $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$ e $1 = e^{i0}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\frac{\rho^3 e^{i\theta}}{\rho e^{-i\theta}} = e^{i0} \qquad \text{da cui} \qquad \rho^2 e^{2i\theta} = e^{i0} \ .$$

Eguagliando i moduli e gli argomenti, a meno di multipli di 2π, nella precedente espressione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \ , \\ 2\theta = 0 + 2k\pi \quad k\in\mathbf{Z} \ , \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \rho = 1 \ , \\ \theta = k\pi \quad k\in\mathbf{Z} \ . \end{cases}$$

Riscrivendo le soluzioni trovate in forma algebrica, si ricavano le due soluzioni $z = \pm 1$.

Esercizio 4.

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare omogenea del secondo ordine, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \frac{\pi^2}{16} = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm i\pi/4$. Pertanto, l'integrale generale sarà

$$y(x) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) \ .$$

Imponendo le condizioni $y(2) = y(6) = 0$, si ricava $C_2 = 0$ e $C_1 \in \mathbb{R}$, da cui si ottengono le infinite soluzioni $y(x) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.

Domanda 1.

- Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata e sia x_0 un punto dell'intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0, allora f è anche continua in x_0.
  Osserviamo che non vale il viceversa, cioè la continuità in un punto non implica, in generale, la derivabilità in tale punto.
- Per la dimostrazione della precedente proprietà, vedere libro di testo.
  Considerando, ad esempio, la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = |x|$, si osserva che essa è continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile, in quanto tale funzione presenta in $x_0 = 0$ un punto angoloso.

Domanda 2.

- Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un'assegnata funzione continua. Allora, esiste un punto $c \in (a, b)$, tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx = f(c) \ .$$

- Per la dimostrazione del precedente teorema, vedere libro di testo.

10 GENNAIO 2003 — SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1.

- $$f'(x) = e^x(3x^2 + 14x + 8) \ ; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = -4, -2/3 \ ;$$
$$f'(x) < 0 \quad \text{per } -4 < x < -2/3 \ , \qquad f'(x) > 0 \quad \text{per } -6 < x < -4 \text{ e } -2/3 < x < 1 \ .$$

Pertanto, $x = -6, -2/3$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = -4, 1$ sono punti di massimo relativo, per la funzione f nell'intervallo considerato. Poiché $g(x) = -|f(x)|$ e $f(x) > 0$ per $x < -8/3$ e $x > 0$, si ottiene che $x = -6, -8/3, 0$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = -4, -2/3, 1$ sono punti di minimo relativo, per la funzione g nell'intervallo considerato.

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$, inoltre $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x < -8/3,\ x > 0, \qquad f(x) < 0 \quad \text{per } -8/3 < x < 0, \qquad f(x) = 0 \quad \text{per } x = -8/3, 0 \ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2 e^x = 0 \qquad y = 0 \ \text{è asinototo orizzontale per } x \to -\infty \ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2 e^x = +\infty \qquad \text{non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to +\infty \ ;$$

$$f'(x) = e^x(3x^2 + 14x + 8) \ , \qquad f'(x) = 0 \ \text{ per } x = -4, -2/3 \ ;$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } \ x < -4,\ x > -2/3 \ , \quad f \text{ è crescente } ;$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } \ -4 < x < -2/3 \ , \quad f \text{ è decrescente } ;$$

$$x = -2/3 \ \text{ è punto di minimo assoluto } , \qquad x = -4 \ \text{ è punto di massimo relativo } ;$$

$$f''(x) = e^x(3x^2 + 20x + 22) \ , \qquad f''(x) = 0 \ \text{ per } x = \frac{-10 \pm \sqrt{34}}{3} \ ;$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{per } \ \frac{-10 - \sqrt{34}}{3} < x < \frac{-10 + \sqrt{34}}{3} \ , \quad f \text{ è concava } ;$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per } \ x < \frac{-10 - \sqrt{34}}{3},\ x > \frac{-10 + \sqrt{34}}{3} \ , \quad f \text{ è convessa } ;$$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{34}}{3} \ \text{ sono punti di flesso } .$$

Osservando che

$$g(x) = -|f(x)| = \begin{cases} -f(x) & \text{se } f(x) > 0, \text{ ovvero per } \ x < -8/3,\ x > 0 \ , \\ f(x) & \text{se } f(x) < 0, \text{ ovvero per } \ -8/3 \le x \le 0 \ , \end{cases}$$

il grafico di g si ottiene da quello di f, semplicemente ribaltando quest'ultimo negli intervalli $(-\infty, -8/3)$ e $(0, +\infty)$, cioè dove f è positiva. Pertanto, $x = -8/3, 0$ risulteranno essere punti angolosi di massimo assoluto per g, mentre $x = -4, -2/3$ saranno punti di minimo relativo. Per completezza, osserviamo che $g(-2/3) = -4\mathrm{e}^{-2/3}$ ed $g(-4) = -16\mathrm{e}^{-4}$; pertanto $g(-2/3) < g(-4)$. Infine, $x = \frac{-10\pm\sqrt{34}}{3}$ sono punti di flesso. Il grafico è

Esercizio 2.

- La funzione proposta è continua su tutto $\mathbb{R}^2$, in quanto composizione di funzioni continue in tutto il piano. Dalle regole di derivazione, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{1}{3}x^{-2/3}y^{2/3}\Big|_{(x,y)=(1,1)} = \frac{1}{3} \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{2}{3}x^{1/3}y^{-1/3}\Big|_{(x,y)=(1,1)} = \frac{2}{3} \ .$$

- Per stabilire se f è differenziabile nell'origine, bisogna innanzitutto calcolarne le derivate parziali in $(0,0)$. Osservando che la funzione proposta è identicamente nulla lungo gli assi coordinati, si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \ .$$

D'altra parte, f non risulta essere differenziabile, in quanto, effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[3]{hk^2}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{\rho^3\cos\theta\sin^2\theta}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \sqrt[3]{\cos\theta\sin^2\theta} \neq 0 \ .$$

Infine, poiché f è differenziabile in ogni punto non appartenente agli assi coordinati, in quanto composizione di funzioni differenziabili, da un noto teorema, ricaviamo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)v_2 = \frac{1}{3}\,v_1 + \frac{2}{3}\,v_2 \ ,$$

ove si è posto $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Esercizio 3.

Ponendo $z = \rho\mathrm{e}^{i\theta}$, ed osservando che $\overline{z} = \rho\mathrm{e}^{-i\theta}$ e $-1 = \mathrm{e}^{i\pi}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\frac{\rho^3\mathrm{e}^{i\theta}}{\rho\mathrm{e}^{-i\theta}} = \mathrm{e}^{i\pi} \qquad \text{da cui} \qquad \rho^2\mathrm{e}^{2i\theta} = \mathrm{e}^{i\pi} \ .$$

Eguagliando i moduli e gli argomenti, a meno di multipli di 2π, nella precedente espressione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \ , \\ 2\theta = \pi + 2k\pi \quad k\in\mathbf{Z} \ , \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \rho = 1 \ , \\ \theta = \pi/2 + k\pi \quad k\in\mathbf{Z} \ . \end{cases}$$

Riscrivendo le soluzioni trovate in forma algebrica, si ricavano le due soluzioni $z = \pm i$.

Esercizio 4.

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare omogenea del secondo ordine, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \pi^2/4 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm i\pi/2$. Pertanto, l'integrale generale sarà

$$y(x) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \ .$$

Imponendo le condizioni $y(1) = y(3) = 0$, si ricava $C_2 = 0$ e $C_1 \in \mathbb{R}$, da cui si ottengono le infinite soluzioni $y(x) = C_1 \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$.

Domanda 1.

- Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata e sia x_0 un punto dell'intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0, allora f è anche continua in x_0.
  Osserviamo che non vale il viceversa, cioè la continuità in un punto non implica, in generale, la derivabilità in tale punto.
- Per la dimostrazione della precedente proprietà, vedere libro di testo.
  Considerando, ad esempio, la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = |x|$, si osserva che essa è continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile, in quanto tale funzione presenta in $x_0 = 0$ un punto angoloso.

Domanda 2.

- Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un'assegnata funzione continua e sia $c \in [a, b]$. Allora, la funzione integrale definita da
  $$F(x) = \int_c^x f(t)\ dt \qquad \forall x \in [a, b]$$
  è derivabile in $[a, b]$ e vale la relazione $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in [a, b]$.
- Per la dimostrazione del precedente teorema, vedere libro di testo.

10 GENNAIO 2003 — SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1.

-
$$f'(x) = -e^{-x}(3x^2 - 14x + 8) \; ; \qquad f'(x) = 0 \quad \text{per } x = 2/3, 4 \; ;$$
$$f'(x) > 0 \quad \text{per } 2/3 < x < 4 \; , \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } -1 < x < 2/3 \text{ e } 4 < x < 6 \; .$$

Pertanto, $x = 2/3, 6$ sono punti di minimo relativo, mentre $x = -1, 4$ sono punti di massimo relativo, per la funzione f nell'intervallo considerato. Poiché $g(x) = |f(x)|$ e $f(x) < 0$ per $x \in (0, 4/3)$, si ottiene che $x = -1, 2/3, 4$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = 0, 8/3, 6$ sono punti di minimo relativo, per la funzione g nell'intervallo considerato.

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = \mathbb{R}$, inoltre $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$f(x) > 0 \quad \text{per } x < 0,\ x > 8/3, \qquad f(x) < 0 \quad \text{per } 0 < x < 8/3, \qquad f(x) = 0 \quad \text{per } x = 0, 8/3 \; ;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 3x^2 e^{-x} = 0 \qquad y = 0 \text{ è asinototo orizzontale per } x \to +\infty \; ;$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 3x^2 e^{-x} = +\infty \qquad \text{non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to -\infty \; ;$$

$$f'(x) = -e^{-x}(3x^2 - 14x + 8) \; , \qquad f'(x) = 0 \text{ per } x = 2/3, 4 \; ;$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } \; 2/3 < x < 4 \; , \quad f \text{ è crescente} \; ;$$

$$f'(x) < 0 \quad \text{per } \; x < 2/3,\ x > 4 \; , \quad f \text{ è decrescente} \; ;$$

$$x = 2/3 \text{ è punto di minimo assoluto} \; , \qquad x = 4 \text{ è punto di massimo relativo} \; ;$$

$$f''(x) = e^{-x}(3x^2 - 20x + 22) \; , \qquad f''(x) = 0 \text{ per } x = \frac{10 \pm \sqrt{34}}{3} \; ;$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{per } \; \frac{10 - \sqrt{34}}{3} < x < \frac{10 + \sqrt{34}}{3} \; , \quad f \text{ è concava} \; ;$$

$$f''(x) > 0 \quad \text{per } \; x < \frac{10 - \sqrt{34}}{3},\ x > \frac{10 + \sqrt{34}}{3} \; , \quad f \text{ è convessa} \; ;$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{34}}{3} \text{ sono punti di flesso} \; .$$

Osservando che

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) > 0, \text{ ovvero per } \; x \le 0,\ x \ge 8/3 \; , \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0, \text{ ovvero per } \; 0 < x < 8/3 \; , \end{cases}$$

il grafico di g si ottiene da quello di f, semplicemente ribaltando quest'ultimo nell'intervallo $(0, 8/3)$, cioè dove f è negativa. Pertanto, $x = 0, 8/3$ risulteranno essere punti angolosi di minimo assoluto per g, mentre $x = 2/3, 4$ saranno punti di massimo relativo. Per completezza, osserviamo che $g(2/3) = 4\mathrm{e}^{-2/3}$ ed $g(4) = 16\mathrm{e}^{-4}$; pertanto $g(2/3) > g(4)$. Infine, $x = \frac{10 \pm \sqrt{34}}{3}$ sono punti di flesso. Il grafico è

Esercizio 2.

- La funzione proposta è continua su tutto $I\!R^2$, in quanto composizione di funzioni continue in tutto il piano. Dalle regole di derivazione, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = \frac{2}{5} x^{-3/5} y^{1/5} \Big|_{(x,y)=(2,2)} = \frac{2}{5}\, 2^{-2/5} \ ,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = \frac{1}{5} x^{2/5} y^{-4/5} \Big|_{(x,y)=(2,2)} = \frac{1}{5}\, 2^{-2/5} \ .$$

- Per stabilire se f è differenziabile nell'origine, bisogna innanzitutto calcolarne le derivate parziali in $(0,0)$. Osservando che la funzione proposta è identicamente nulla lungo gli assi coordinati, si ottiene che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \ .$$

D'altra parte, f non risulta essere differenziabile, in quanto, effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt[5]{h^2 k}}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}}{\rho} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\sqrt[5]{\cos^2\theta \sin\theta}}{\rho^{2/5}} \neq 0 \ .$$

Infine, poiché f è differenziabile in ogni punto non appartenente agli assi coordinati, in quanto composizione di funzioni differenziabili, da un noto teorema, ricaviamo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(2,2) = \nabla f(2,2) \cdot \vec{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(2,2) v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) v_2 = \frac{2}{5}\, 2^{-2/5} v_1 + \frac{1}{5}\, 2^{-2/5} v_2 \ ,$$

ove si è posto $\vec{v} = (v_1, v_2)$.

Esercizio 3.

Ponendo $z = \rho \mathrm{e}^{i\theta}$, ed osservando che $\overline{z} = \rho \mathrm{e}^{-i\theta}$ e $i = \mathrm{e}^{i\pi/2}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\frac{\rho^3 \mathrm{e}^{i\theta}}{\rho \mathrm{e}^{-i\theta}} = \mathrm{e}^{i\pi/2} \qquad \text{da cui} \qquad \rho^2 \mathrm{e}^{2i\theta} = \mathrm{e}^{i\pi/2} \ .$$

Eguagliando i moduli e gli argomenti, a meno di multipli di 2π, nella precedente espressione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \ , \\ 2\theta = \pi/2 + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \ , \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \rho = 1 \ , \\ \theta = \pi/4 + k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \ . \end{cases}$$

Riscrivendo le soluzioni trovate in forma algebrica, si ricavano le due soluzioni

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Esercizio 4.

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare omogenea del secondo ordine, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + \pi^2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = \pm i\pi$. Pertanto, l'integrale generale sarà

$$y(x) = C_1 \cos(\pi x) + C_2 \sin(\pi x) \ .$$

Imponendo le condizioni $y(0) = y(2) = 0$, si ricava $C_1 = 0$ e $C_2 \in \mathbb{R}$, da cui si ottengono le infinite soluzioni $y(x) = C_2 \sin(\pi x)$.

Domanda 1.

- Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione assegnata e sia x_0 un punto dell'intervallo $[a, b]$. Se f è derivabile in x_0, allora f è anche continua in x_0.
  Osserviamo che non vale il viceversa, cioè la continuità in un punto non implica, in generale, la derivabilità in tale punto.
- Per la dimostrazione della precedente proprietà, vedere libro di testo.
  Considerando, ad esempio, la funzione $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, definita da $f(x) = |x|$, si osserva che essa è continua in $x_0 = 0$, ma non derivabile, in quanto tale funzione presenta in $x_0 = 0$ un punto angoloso.

Domanda 2.

- Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ un'assegnata funzione continua. Allora, esiste un punto $c \in (a, b)$, tale che

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\ dx = f(c) \ .$$

- Per la dimostrazione del precedente teorema, vedere libro di testo.