10 GENNAIO 2003 — SOLUZIONI COMPITO

Esercizio 1.

Per semplicità poniamo $g(x) = \mathrm{e}^{-x}(3x^2 + 4x - 4)$. Allora si ha che g è definita su tutto l'asse reale e $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

$$g(x) > 0 \quad \text{per } x < -2,\ x > 2/3, \qquad g(x) < 0 \quad \text{per } -2 < x < 2/3, \qquad g(x) = 0 \quad \text{per } x = -2, 2/3\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 3x^2\mathrm{e}^{-x} = 0 \qquad y = 0 \ \text{ è asinototo orizzontale per } x \to +\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} 3x^2\mathrm{e}^{-x} = +\infty \qquad \text{non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to -\infty\ ;$$

$$g'(x) = -\mathrm{e}^{-x}(3x^2 - 2x - 8)\ , \qquad g'(x) = 0 \ \text{ per } x = -4/3, 2\ ;$$

$$g'(x) > 0 \quad \text{per } \ -4/3 < x < 2\ , \quad g \text{ è crescente}\ ;$$

$$g'(x) < 0 \quad \text{per } \ x < -4/3,\ x > 2\ , \quad g \text{ è decrescente}\ ;$$

$$x = -4/3 \ \text{ è punto di minimo assoluto}\ , \qquad x = 2 \ \text{ è punto di massimo relativo}\ ;$$

$$g''(x) = \mathrm{e}^{-x}(3x^2 - 8x - 6)\ , \qquad g''(x) = 0 \ \text{ per } x = \frac{4 \pm \sqrt{34}}{3}\ ;$$

$$g''(x) < 0 \quad \text{per } \ \frac{4 - \sqrt{34}}{3} < x < \frac{4 + \sqrt{34}}{3}\ , \quad g \text{ è concava}\ ;$$

$$g''(x) > 0 \quad \text{per } \ x < \frac{4 - \sqrt{34}}{3},\ x > \frac{4 + \sqrt{34}}{3}\ , \quad g \text{ è convessa}\ ;$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{34}}{3} \ \text{ sono punti di flesso}\ .$$

Osservando che

$$f(x) = |g(x)| = \begin{cases} g(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \text{ ovvero per } \ x \leq -2,\ x \geq 2/3\ , \\ -g(x) & \text{se } g(x) < 0, \text{ ovvero per } \ -2 < x < 2/3\ , \end{cases}$$

il grafico di f si ottiene da quello di g, semplicemente ribaltando quest'ultimo nell'intervallo $(-2, 2/3)$, cioè dove g è negativa. Pertanto, $x = -2, 2/3$ risulteranno essere punti angolosi di minimo assoluto per f, mentre $x = -4/3, 2$ saranno punti di massimo relativo. Per completezza, osserviamo che $f(-4/3) = 4\mathrm{e}^{4/3}$ ed $f(2) = 16\mathrm{e}^{-2}$; pertanto $f(-4/3) > f(2)$. Infine, $x = \frac{4\pm\sqrt{34}}{3}$ sono punti di flesso. Il grafico è

Esercizio 2.

Osserviamo, innanzitutto, che la serie proposta è a termini positivi. Applicando il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{1}{2^x}\right)^n (n^2+1)} = \frac{1}{2^x} \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{(n^2+1)} = \frac{1}{2^x} \ .$$

Pertanto, la serie proposta sarà convergente per $1/2^x < 1$, ovvero $x > 0$; mentre sarà divergente per $1/2^x > 1$, cioè $x < 0$. Resta da studiare il caso $x = 0$, che fornisce

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n^2+1) \ .$$

Poiché, in tal caso, il termine generale della serie non è infinitesimo, essa risulta essere divergente. Concludendo, la serie proposta converge per $x > 0$, mentre diverge per $x \leq 0$.

Esercizio 3.

Ponendo $z = \rho e^{i\theta}$, ed osservando che $\overline{z} = \rho e^{-i\theta}$ e $-i = e^{-i\pi/2}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\frac{\rho^3 e^{i\theta}}{\rho e^{-i\theta}} = e^{-i\pi/2} \qquad \text{da cui} \qquad \rho^2 e^{2i\theta} = e^{-i\pi/2} \ .$$

Eguagliando i moduli e gli argomenti, a meno di multipli di 2π, nella precedente espressione, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \rho^2 = 1 \ , \\ 2\theta = -\pi/2 + 2k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \ , \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} \rho = 1 \ , \\ \theta = -\pi/4 + k\pi \quad k \in \mathbf{Z} \ . \end{cases}$$

Riscrivendo le soluzioni trovate in forma algebrica, si ricavano le due soluzioni

$$z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \ .$$

Esercizio 4.

Ricordando gli ordini di infinito, si ottiene

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x - 3x^2}{2x + \log x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4e^x}{2x} = 2 \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \ .$$