SOLUZIONI COMPITO del 10/01/2018
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1
Osserviamo che, ponendo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ e $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\overline{z}^3 = 3z|z| \qquad \Longrightarrow \qquad r^3\mathrm{e}^{-3i\theta} = 3r^2\mathrm{e}^{i\theta}\,.$$

Pertanto, una soluzione è data da $r = 0$, cioè $z = 0$, mentre le altre si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r = 3\,, \\ -3\theta = \theta - 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} r = 3\,, \\ \theta = k\pi/2\,, \quad k = 0,1,2,3\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} z_1 = 3\mathrm{e}^{i0} = 3\,, \\ z_2 = 3\mathrm{e}^{i\pi/2} = 3i\,, \\ z_3 = 3\mathrm{e}^{i\pi} = -3\,, \\ z_4 = 3\mathrm{e}^{3i\pi/2} = -3i\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Applicando le proprietà dei logaritmi e riscrivendo la successione proposta nella forma

$$\frac{\left[1+\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right]^{n^2}}{\mathrm{e}^{3n}} = \frac{\exp\left[\log\left(\left[1+\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right]^{n^2}\right)\right]}{\mathrm{e}^{3n}} = \exp\left(n^2\log\left[1+\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right] - 3n\right)\,,$$

si arriva a dover studiare la successione degli esponenti

$$\begin{aligned} a_n :&= n^2\log\left[1+\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right] - 3n = n^2\left(\left[\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{3}{n}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 3n \\ &= n^2\left(\left[\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{3}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 3n \\ &= n^2\left(\frac{3}{n} - \frac{9}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 3n = 3n - \frac{9}{2} - 3n + o(1) \sim -\frac{9}{2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, il limite proposto vale $\mathrm{e}^{-9/2}$.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 4\lambda - 5 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = -1; 5$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{5x}$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-x}(1-x)$ e $y''(x) = A\mathrm{e}^{-x}(x-2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{-x}(x - 2 - 4 + 4x - 5x) = 4\mathrm{e}^{-x}\,, \quad \text{da cui } A = -2/3.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{5x} - \frac{2}{3}x\mathrm{e}^{-x}$, che risulta infinitesimo, per $x \to +\infty$ se e solo se $C_2 = 0$. Quindi, le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = (C_1 - 2x/3)\mathrm{e}^{-x}$.

Esercizio 4
L'integrale proposto è un integrale improprio e, poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $[1, +\infty)$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) := \sqrt{x^{\alpha-1}} \log\left(1 + \frac{1}{x^2 + 2x}\right) \sim \sqrt{x^{\alpha-1}} \frac{1}{x^2 + 2x} \sim x^{(\alpha-1)/2} \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^{2-(\alpha-1)/2}},$$

ricava che l'integrale improprio converge se e solo se $2 - (\alpha - 1)/2 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha < 3$.

Esercizio 5
i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.
ii) Sia $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x |t| f(t)\, dt + x^2 - 1\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ ed è positiva, la funzione F è di classe $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ ed inoltre

$$F(-1) = \int_0^{-1} |t| f(t)\, dt = -\int_{-1}^0 |t| f(t)\, dt < 0\,, \qquad \text{mentre} \qquad F(1) = \int_0^1 |t| f(t)\, dt > 0\,.$$

Pertanto, dal teorema degli zeri, si ricava subito che esiste almeno un punto $x_0 \in [-1, 1]$ tale che $F(x_0) = 0$, ovvero x_0 è una soluzione dell'equazione proposta. Per dimostrare che essa è unica, studiamo la monotonia di F. Utilizzando il teorema di Torricelli, ricaviamo che

$$F'(x) = |x| f(x) + 2x = \begin{cases} x(f(x) + 2) > 0 & \text{per } x > 0; \\ 0 & \text{per } x = 0; \\ x(-f(x) + 2) < 0 & \text{per } x < 0; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $f(x) \in (0, 1]$ per ogni $x \in [-1, 1]$. Quindi $x = 0$ è punto di minimo assoluto (in cui la funzione assume il valore $-1 < 0$) e $x = \pm 1$ sono punti di massimo relativo. In particolare, da quanto ricavato in precedenza, si ha che $x = 1$ è punto di massimo assoluto, in cui la funzione è strettamente positiva, mentre $x = -1$ è punto di massimo relativo, in cui la funzione è strettamente negativa. Pertanto, il grafico di F attraversa l'asse delle ascisse SOLO nel punto $x_0 \in (0, 1)$ e, conseguentemente, l'equazione proposta ammette un'unica soluzione in $[-1, 1]$.

TEMA B

Esercizio 1

Osserviamo che, ponendo $z = re^{i\theta}$ e $\overline{z} = re^{-i\theta}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\overline{z}^4 = 4z^2|z| \qquad \Longrightarrow \qquad r^4 e^{-4i\theta} = 4r^3 e^{2i\theta}\,.$$

Pertanto, una soluzione è data da $r = 0$, cioè $z = 0$, mentre le altre si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r = 4\,, \\ -4\theta = 2\theta - 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r = 4\,, \\ \theta = k\pi/3\,, \quad k = 0,1,2,3,4,5\,, \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = 4e^{i0} = 4\,, \\ z_2 = 4e^{i\pi/3} = 2 + 2i\sqrt{3}\,, \\ z_3 = 4e^{2i\pi/3} = -2 + 2i\sqrt{3}\,, \\ z_4 = 4e^{i\pi} = -4\,, \\ z_5 = 4e^{4i\pi/3} = -2 - 2i\sqrt{3}\,, \\ z_6 = 4e^{5i\pi/3} = 2 - 2i\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Applicando le proprietà dei logaritmi e riscrivendo la successione proposta nella forma

$$\frac{e^{4n^2}}{\left[1 + 4\tanh\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^4}} = \frac{e^{4n^2}}{\exp\left[\log\left(\left[1 + 4\tanh\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^4}\right)\right]} = \exp\left(4n^2 - n^4\log\left[1 + 4\tanh\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)\,,$$

si arriva a dover studiare la successione degli esponenti

$$\begin{aligned} a_n :&= 4n^2 - n^4\log\left[1 + 4\tanh\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 4n^2 - n^4\left(\left[4\tanh\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[4\tanh\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= 4n^2 - n^4\left(\left[\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= 4n^2 - n^4\left(\frac{4}{n^2} - \frac{8}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = 4n^2 - 4n^2 + 8 + o(1) \sim 8\,. \end{aligned}$$

Pertanto, il limite proposto vale e^8.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 + 3\lambda - 4 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = 1; -4$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = Axe^x$, da cui $y_p'(x) = Ae^x(1+x)$ e $y''(x) = Ae^x(x+2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$Ae^x(x + 2 + 3 + 3x - 4x) = 3e^x\,, \quad \text{da cui } A = 3/5.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = C_1e^{-4x} + C_2e^x + \frac{3}{5}xe^x$, che risulta infinitesimo, per $x \to -\infty$ se e solo se $C_1 = 0$. Quindi, le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = (C_2 + 3x/5)e^x$.

Esercizio 4

L'integrale proposto è un integrale improprio e, poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $(0,1]$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di 0^+. Tenendo conto che, per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{x^{2\alpha+1}}}{\log(1 + x + 2x^2)} \sim \frac{\sqrt[3]{x^{2\alpha+1}}}{x + 2x^2} \sim x^{(2\alpha+1)/3}\frac{1}{x} = \frac{1}{x^{1-(2\alpha+1)/3}}\,,$$

ricava che l'integrale improprio converge se e solo se $1 - (2\alpha+1)/3 < 1$, ovvero se e solo se $\alpha > -1/2$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Sia $F : [-2, 2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x |t|f(t)\,dt - x^2 + 4\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0([-2, 2])$ ed è negativa, la funzione F è di classe $\mathcal{C}^1([-2, 2])$ ed inoltre

$$F(-2) = \int_0^{-2} |t|f(t)\,dt = -\int_{-2}^{0} |t|f(t)\,dt > 0\,, \qquad \text{mentre} \qquad F(2) = \int_0^2 |t|f(t)\,dt < 0\,.$$

Pertanto, dal teorema degli zeri, si ricava subito che esiste almeno un punto $x_0 \in [-2, 2]$ tale che $F(x_0) = 0$, ovvero x_0 è una soluzione dell'equazione proposta. Per dimostrare che essa è unica, studiamo la monotonia di F. Utilizzando il teorema di Torricelli, ricaviamo che

$$F'(x) = |x|f(x) - 2x = \begin{cases} x(f(x) - 2) < 0 & \text{per } x > 0; \\ 0 & \text{per } x = 0; \\ x(-f(x) - 2) > 0 & \text{per } x < 0; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $f(x) \in [-1, 0)$ per ogni $x \in [-2, 2]$. Quindi $x = 0$ è punto di massimo assoluto (in cui la funzione assume il valore $4 > 0$) e $x = \pm 2$ sono punti di minimo relativo. In particolare, da quanto ricavato in precedenza, si ha che $x = 2$ è punto di minimo assoluto, in cui la funzione è strettamente negativa, mentre $x = -2$ è punto di minimo relativo, in cui la funzione è strettamente positiva. Pertanto, il grafico di F attraversa l'asse delle ascisse SOLO nel punto $x_0 \in (0, 2)$ e, conseguentemente, l'equazione proposta ammette un'unica soluzione in $[-2, 2]$.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che, ponendo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ e $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\overline{z}^5 = 5z|z|^5 \qquad \Longrightarrow \qquad r^5\mathrm{e}^{-5i\theta} = 5r^6\mathrm{e}^{i\theta}\,.$$

Pertanto, una soluzione è data da $r = 0$, cioè $z = 0$, mentre le altre si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r = 1/5\,, \\ -5\theta = \theta - 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} r = 1/5\,, \\ \theta = k\pi/3\,, \quad k = 0,1,2,3,4,5\,, \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad \begin{cases} z_1 = (1/5)\mathrm{e}^{i0} = 1/5\,, \\ z_2 = (1/5)\mathrm{e}^{i\pi/3} = (1/5)(1/2 + i\sqrt{3}/2)\,, \\ z_3 = (1/5)\mathrm{e}^{2i\pi/3} = (1/5)(-1/2 + i\sqrt{3}/2)\,, \\ z_4 = (1/5)\mathrm{e}^{i\pi} = -1/5\,, \\ z_5 = (1/5)\mathrm{e}^{4i\pi/3} = (1/5)(-1/2 - i\sqrt{3}/2)\,, \\ z_6 = (1/5)\mathrm{e}^{5i\pi/3} = (1/5)(1/2 - i\sqrt{3}/2)\,. \end{cases}$$

Esercizio 2

Applicando le proprietà dei logaritmi e riscrivendo la successione proposta nella forma

$$\frac{\mathrm{e}^{5n^2}}{\left[1 + 5\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^4}} = \frac{\mathrm{e}^{5n^2}}{\exp\left[\log\left(\left[1 + 5\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^{n^4}\right)\right]} = \exp\left(5n^2 - n^4\log\left[1 + 5\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]\right)\,,$$

si arriva a dover studiare la successione degli esponenti

$$\begin{aligned} a_n :&= 5n^2 - n^4\log\left[1 + 5\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] = 5n^2 - n^4\left(\left[5\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[5\tan\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= 5n^2 - n^4\left(\left[\frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{5}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) \\ &= 5n^2 - n^4\left(\frac{5}{n^2} - \frac{25}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right) = 5n^2 - 5n^2 + \frac{25}{2} + o(1) \sim \frac{25}{2}\,. \end{aligned}$$

Pertanto, il limite proposto vale $\mathrm{e}^{25/2}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = 1; -3$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^x$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^x$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^x(1 + x)$ e $y''(x) = A\mathrm{e}^x(x + 2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^x(x + 2 + 2 + 2x - 3x) = 2\mathrm{e}^x\,, \quad \text{da cui } A = 1/2.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2\mathrm{e}^x + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x$, che risulta infinitesimo, per $x \to -\infty$ se e solo se $C_1 = 0$. Quindi, le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = (C_2 + x/2)\mathrm{e}^x$.

Esercizio 4

L'integrale proposto è un integrale improprio e, poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $(0,1]$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di 0^+. Tenendo conto che, per $x \to 0^+$, si ha

$$f(x) := \frac{\sqrt[3]{x^{1-2\alpha}}}{\log(1+2x^2+x^3)} \sim \frac{\sqrt[3]{x^{1-2\alpha}}}{2x^2+x^3} \sim x^{(1-2\alpha)/3}\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2x^{2-(1-2\alpha)/3}}\,,$$

ricava che l'integrale improprio converge se e solo se $2-(1-2\alpha)/3 < 1$, ovvero se e solo se $\alpha < -1$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Sia $F : [-2,2] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x |t|f(t)\,dt - x^2 + 4\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0([-2,2])$ ed è negativa, la funzione F è di classe $\mathcal{C}^1([-2,2])$ ed inoltre

$$F(-2) = \int_0^{-2} |t|f(t)\,dt = -\int_{-2}^{0} |t|f(t)\,dt > 0\,, \qquad \text{mentre} \qquad F(2) = \int_0^{2} |t|f(t)\,dt < 0\,.$$

Pertanto, dal teorema degli zeri, si ricava subito che esiste almeno un punto $x_0 \in [-2,2]$ tale che $F(x_0) = 0$, ovvero x_0 è una soluzione dell'equazione proposta. Per dimostrare che essa è unica, studiamo la monotonia di F. Utilizzando il teorema di Torricelli, ricaviamo che

$$F'(x) = |x|f(x) - 2x = \begin{cases} x(f(x)-2) < 0 & \text{per } x > 0; \\ 0 & \text{per } x = 0; \\ x(-f(x)-2) > 0 & \text{per } x < 0; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $f(x) \in [-1,0)$ per ogni $x \in [-2,2]$. Quindi $x = 0$ è punto di massimo assoluto (in cui la funzione assume il valore $4 > 0$) e $x = \pm 2$ sono punti di minimo relativo. In particolare, da quanto ricavato in precedenza, si ha che $x = 2$ è punto di minimo assoluto, in cui la funzione è strettamente negativa, mentre $x = -2$ è punto di minimo relativo, in cui la funzione è strettamente positiva. Pertanto, il grafico di F attraversa l'asse delle ascisse SOLO nel punto $x_0 \in (0,2)$ e, conseguentemente, l'equazione proposta ammette un'unica soluzione in $[-2,2]$.

TEMA D

Esercizio 1
Osserviamo che, ponendo $z = r\mathrm{e}^{i\theta}$ e $\overline{z} = r\mathrm{e}^{-i\theta}$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$\overline{z}^2 = 2z^2|z| \qquad \Longrightarrow \qquad r^2\mathrm{e}^{-2i\theta} = 2r^3\mathrm{e}^{2i\theta}\,.$$

Pertanto, una soluzione è data da $r = 0$, cioè $z = 0$, mentre le altre si ottengono risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r = 1/2\,, \\ -2\theta = 2\theta - 2k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} r = 1/2\,, \\ \theta = k\pi/2\,, \quad k = 0,1,2,3\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} z_1 = (1/2)\mathrm{e}^{i0} = 1/2\,, \\ z_2 = (1/2)\mathrm{e}^{i\pi/2} = i/2\,, \\ z_3 = (1/2)\mathrm{e}^{i\pi} = -1/2\,, \\ z_4 = (1/2)\mathrm{e}^{3i\pi/2} = -i/2\,. \end{cases}$$

Esercizio 2
Applicando le proprietà dei logaritmi e riscrivendo la successione proposta nella forma

$$\frac{\left[1+\sinh\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{n^2}}{\mathrm{e}^{2n}} = \frac{\exp\left[\log\left(\left[1+\sinh\left(\frac{2}{n}\right)\right]^{n^2}\right)\right]}{\mathrm{e}^{2n}} = \exp\left(n^2\log\left[1+\sinh\left(\frac{2}{n}\right)\right] - 2n\right)\,,$$

si arriva a dover studiare la successione degli esponenti

$$\begin{aligned} a_n := n^2\log\left[1+\sinh\left(\frac{2}{n}\right)\right] - 2n &= n^2\left(\left[\sinh\left(\frac{2}{n}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\sinh\left(\frac{2}{n}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2n \\ &= n^2\left(\left[\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]^2 + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2n \\ &= n^2\left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 2n = 2n - 2 - 2n + o(1) \sim -2\,. \end{aligned}$$

Pertanto, il limite proposto vale e^{-2}.

Esercizio 3
L'equazione differenziale proposta è un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, non omogenea, la cui equazione caratteristica associata è data da $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ ed ha per soluzioni $\lambda_{1,2} = -1; 6$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea associata sarà $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{6x}$. Inoltre, utilizzando il metodo di somiglianza, si ricava che una soluzione particolare sarà data da $y_p(x) = Ax\mathrm{e}^{-x}$, da cui $y_p'(x) = A\mathrm{e}^{-x}(1-x)$ e $y''(x) = A\mathrm{e}^{-x}(x-2)$. Inserendo nell'equazione completa, otteniamo

$$A\mathrm{e}^{-x}(x - 2 - 5 + 5x - 6x) = 5\mathrm{e}^{-x}\,, \quad \text{da cui } A = -5/7.$$

Pertanto, l'integrale generale dell'equazione completa sarà dato da $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-x} + C_2\mathrm{e}^{6x} - \frac{5}{7}x\mathrm{e}^{-x}$, che risulta infinitesimo, per $x \to +\infty$ se e solo se $C_2 = 0$. Quindi, le soluzioni cercate saranno della forma $y(x) = (C_1 - 5x/7)\mathrm{e}^{-x}$.

Esercizio 4
L'integrale proposto è un integrale improprio e, poiché la funzione integranda è positiva e continua nell'intervallo $[1, +\infty)$, resta solo da studiare il suo comportamento in un intorno di $+\infty$. Tenendo conto che, per $x \to +\infty$, si ha

$$f(x) := \sqrt{x^{1-\alpha}}\log\left(1 + \frac{1}{2x^3+x}\right) \sim \sqrt{x^{1-\alpha}}\frac{1}{2x^3+x} \sim x^{(1-\alpha)/2}\frac{1}{2x^3} = \frac{1}{2x^{3-(1-\alpha)/2}}\,,$$

ricava che l'integrale improprio converge se e solo se $3 - (1-\alpha)/2 > 1$, ovvero se e solo se $\alpha > -3$.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Sia $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$F(x) := \int_0^x |t| f(t)\, dt + x^2 - 1\,.$$

Poiché $f \in \mathcal{C}^0([-1, 1])$ ed è positiva, la funzione F è di classe $\mathcal{C}^1([-1, 1])$ ed inoltre

$$F(-1) = \int_0^{-1} |t| f(t)\, dt = -\int_{-1}^{0} |t| f(t)\, dt < 0\,, \qquad \text{mentre} \qquad F(1) = \int_0^1 |t| f(t)\, dt > 0\,.$$

Pertanto, dal teorema degli zeri, si ricava subito che esiste almeno un punto $x_0 \in [-1, 1]$ tale che $F(x_0) = 0$, ovvero x_0 è una soluzione dell'equazione proposta. Per dimostrare che essa è unica, studiamo la monotonia di F. Utilizzando il teorema di Torricelli, ricaviamo che

$$F'(x) = |x| f(x) + 2x = \begin{cases} x(f(x) + 2) > 0 & \text{per } x > 0; \\ 0 & \text{per } x = 0; \\ x(-f(x) + 2) < 0 & \text{per } x < 0; \end{cases}$$

dove abbiamo tenuto conto che $f(x) \in (0, 1]$ per ogni $x \in [-1, 1]$. Quindi $x = 0$ è punto di minimo assoluto (in cui la funzione assume il valore $-1 < 0$) e $x = \pm 1$ sono punti di massimo relativo. In particolare, da quanto ricavato in precedenza, si ha che $x = 1$ è punto di massimo assoluto, in cui la funzione è strettamente positiva, mentre $x = -1$ è punto di massimo relativo, in cui la funzione è strettamente negativa. Pertanto, il grafico di F attraversa l'asse delle ascisse SOLO nel punto $x_0 \in (0, 1)$ e, conseguentemente, l'equazione proposta ammette un'unica soluzione in $[-1, 1]$.