C.L. Ingegneria Informatica — Analisi I
Soluzioni

E1. **A:** $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 20(x+2y)$

B: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -12(x+3y)$

C: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6(2x-y)$

D: $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8(3x-y)$

E2. **A:** $\frac{1}{4}(5e^4 - 1)$

B: $\frac{1}{4}(1 - 5e^{-2})$

C: $e - 5e^{-1}$

D: $2(1 - 5e^{-2})$

E3. **A:** $z = \{\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ i,\ -i\}$

B: $z = \{i\sqrt{2},\ -i\sqrt{2},\ 1,\ -1\}$

C; $z = \{i\sqrt{3},\ -i\sqrt{3},\ 1,\ -1\}$

D: $z = \{\sqrt{3},\ -\sqrt{3},\ i,\ -i\}$

E4. **A:** $+\infty$

B: $-\infty$

C; 0

D: $+\infty$

E5. **A:** $\max_D f = e^{-1}$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x \le 4, xy = 1\}$,
$\min_D f = 0$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x \le 4, y = 0\}$.

B: $\max_D f = e^{-1}$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le y \le 2, xy = 1\}$,
$\min_D f = 0$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le y \le 2, x = 0\}$.

C; $\max_D f = e^{-1}$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x \le 3, xy = 1\}$,
$\min_D f = 0$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 1 \le x \le 3, y = 0\}$.

D: $\max_D f = e^{-1}$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \le y \le 3, xy = 1\}$,
$\min_D f = 0$, assunto su $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 2 \le y \le 3, x = 0\}$.

E6. **A:** $\alpha \in (-\infty, -\frac{5}{2})$.

B: $\alpha \in (\frac{7}{2}, +\infty)$.

C; $\alpha \in (\frac{5}{2}, +\infty)$.

D: $\alpha \in (-\infty, -\frac{7}{2})$.

E7. **A:** $F(x) = \log|\sin(\log x)| + c$.

B: $F(x) = -\log|\cos(\log x)| + c$.

C; $F(x) = \log|\log(\sin x)| + c$.

D: $F(x) = -\log|\log(\cos x)| + c$.

D1. **A:** no.

B: si.

C; si.

D: no.

D2. **A:** si, perché f è strettamente monotona crescente in $\mathbf{R}^+$.

B: si, perché f è strettamente monotona crescente in $\mathbf{R}^+$.

C; si, perché f è strettamente monotona crescente in $\mathbf{R}^+$.

D: si, perché f è strettamente monotona crescente in $\mathbf{R}^+$.

Svolgimento della versione A

E1.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5\frac{\partial}{\partial y}(x+2y)^2 = 20(x+2y).$$

E2.

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^2 - \int_0^2 xe^{2x}\,dx \\ &= 2e^4 - \frac{1}{2}xe^{2x}\Big|_0^2 + \frac{1}{2}\int_0^2 e^{2x}\,dx \\ &= 2e^4 - e^4 + \frac{1}{4}e^{2x}\Big|_0^2 = \frac{1}{4}(5e^4-1).\end{aligned}$$

Oppure:

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{2x}\,dx &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx \\ &= \frac{1}{4}e^{2x}(2x^2-2x+1) + c =: F(x) + c,\end{aligned}$$

da cui

$$\int_0^2 x^2e^{2x}\,dx = F(2) - F(0) = \frac{1}{4}(5e^4-1).$$

E3. Ponendo $y = z^2$, si ottiene l'equazione

$$y^2 - y - 2 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad y = \begin{cases} 2 \\ -1. \end{cases}$$

Poiché si ha

$$z^2 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}, \qquad z^2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad z = \pm i,$$

le soluzioni sono $z = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}, i, -i\}$.

E4. Si ha

$$\frac{1}{\log(n^3)\sin\frac{1}{n}} \sim \frac{1}{3\log n\,\frac{1}{n}} = \frac{n}{3\log n},$$

e quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\log(n^3)\sin\frac{1}{n}} = +\infty.$$

E5. Si puó semplicemente osservare che

$$f(x,y) = g(xy), \qquad \text{dove} \quad g(t) := te^{-t}.$$

Poiché $\{xy : (x,y) \in D\} = [0,1]$, è sufficiente studiare la funzione g in $[0,1]$. Si ha

$$g'(t) = (1-t)e^{-t}, \qquad \text{in particolare} \quad g'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1],$$

per cui il massimo e il minimo di g su $[0,1]$ sono assunti rispettivamente in $t = 1$ e $t = 0$, e valgono rispettivamente e^{-1} e 0. Pertanto

$$\begin{aligned} \max_D f = e^{-1} \qquad & \text{assunto in} \qquad D \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 1\}, \\ \min_D f = 0 \qquad & \text{assunto in} \qquad D \cap \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : xy = 0\}. \end{aligned}$$

Oppure:

$$\nabla f(x,y) = (1-xy)e^{-xy}(y,x) = (0,0) \iff \begin{cases} (x,y) = (0,0) \\ xy = 1, \end{cases}$$

quindi non ci sono punti stazionari interni a D. Poiché f non ha punti singolari, i punti estremi sono da ricercarsi sulla frontiera del dominio:

$$\partial D = \cup_{i=1}^4 \gamma_i, \qquad \begin{cases} \gamma_1 = \partial D \cap \{y = 0\} \\ \gamma_2 = \partial D \cap \{x = 4\} \\ \gamma_3 = \partial D \cap \{xy = 1\} \\ \gamma_4 = \partial D \cap \{x = 1\}. \end{cases}$$

Si ha

$$\begin{aligned}
f\Big|_{\gamma_1} &\equiv 0,\\
f\Big|_{\gamma_2} &= 4ye^{-4y} =: g_2(y),\ y=[0,\frac{1}{4}],\\
&\quad \max_{[0,\frac14]} g_2(y) = g_2(\frac{1}{4}) = e^{-1},\ \min_{[0,\frac14]} g_2(y) = g_2(0) = 0\\
f\Big|_{\gamma_3} &\equiv e^{-1},\\
f\Big|_{\gamma_4} &= ye^{-y} =: g_4(y),\ y=[0,1],\\
&\quad \max_{[0,1]} g_4(y) = g_4(1) = e^{-1},\ \min_{[0,1]} g_4(y) = g_4(0) = 0,
\end{aligned}$$

da cui si conclude che il minimo assoluto è 0, assunto su γ_1, e il massimo assoluto è e^{-1}, assunto su γ_3.

E6. Si ha:

$$\frac{n^{\alpha+1}}{\arctan\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}} \sim \frac{n^{\alpha+1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = n^{\alpha+\frac{3}{2}}.$$

Dal criterio del confronto asintotico segue

$$\alpha+\frac{3}{2} < -1 \iff \alpha < -\frac{5}{2}.$$

E7. Ponendo

$$y=\log x \Longrightarrow x=e^y,\ dx=e^y dy,$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos(\log x)}{x\sin(\log x)}\,dx &= \int \frac{\cos y}{e^y \sin y}\,e^y\,dy = \int \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \int \frac{1}{\sin y}\left(\frac{d}{dy}\sin y\right)\,dy\\
&= \log|\sin y| + c = \log|\sin(\log x)| + c.
\end{aligned}$$

D1. Si ha

$$x+\frac{1}{5x}>0 \quad\iff\quad \begin{cases} 5x^2+1>0\\ x>0\end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} 5x^2+1<0\\ x<0.\end{cases}$$

Pertanto

$$\left\{x\in\mathbf{R}:\ x+\frac{1}{5x}>0\right\} = (0,+\infty)$$

che non è superiormente limitato.