SOLUZIONI

Esercizio 1

C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = I\!R \setminus \{0\}$; $\quad f(x) > 0 \ \ \forall x \in$ C.E. ;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+$, $\qquad y = 0$ è asintoto orizzontale per $x \to -\infty$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\qquad y = x$ è asintoto obliquo per $x \to +\infty$;

infatti $\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = 1$, $\qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$;

$\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = 1$, $\qquad x = 0$ è punto di continuità per $f(x)$;

$f'(x) = \dfrac{e^x(e^x - x - 1)}{(e^x - 1)^2}$; $\qquad f'(x) > 0 \ \ \forall x \in$ C.E. ;

$\lim_{x\to 0^\pm} f'(x) = 1/2$; $\qquad x = 0$ è punto di derivabilità per $f(x)$.

Esercizio 2

Osserviamo che la serie è a termini positivi; pertanto, utilizzando il criterio della radice, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{(\ln 2)^n}{2n + 3/2}} = \ln 2 < 1 \ .$$

Poiché il limite ottenuto è strettamente minore di 1, il criterio applicato ci permette di affermare che la serie proposta converge.

Esercizio 3

Ricordando gli sviluppi di Mc Laurin delle funzioni $\sin t$ e $\ln(1 + t)$, si ottiene

$$\sin^2 x = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)^2 = x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \ ;$$
$$\ln(1 + x^4) = x^4 + o(x^4) \ .$$

Inserendo quanto trovato nel limite proposto, si ricava

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \sin^2 x - x^3}{5x \ln(1 + x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x^2 - x^4/3) - x^3}{5x \cdot x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-x^5}{3} \cdot \frac{1}{5x^5} = -\frac{1}{15} \ .$$

Esercizio 4

Osserviamo che, effettuando la sostituzione di variabile $t = 1 + e^x$ (da cui $dt = e^x \ dx$) l' integrale proposto diviene

$$\int_0^2 \frac{e^x \ln(1 + e^x)}{1 + e^x} \ dx = \int_2^{1+e^2} \frac{\ln t}{t} \ dt = \frac{1}{2} \ln^2 t \Big|_2^{1+e^2} = \frac{1}{2}[\ln^2(1 + e^2) - \ln^2 2] \ .$$