| | |
|---|---|
| Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐<br><br>ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐<br><br>Appello del 10 luglio 2009 | **TEMA/A**<br><br>Cognome e nome (in stampatello)<br><br>Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐ |

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

**E1.** Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^6 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) z^2 = 0\,.$$

---

**E2.** Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|(\mathrm{e}^{3x}-1)}{x} & \text{se } x < 0; \\ \sqrt[3]{x-2} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

---

**E3.** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \left[ \left(\mathrm{e}^{2/n} - 1\right)^2 - \frac{4}{n^2} \right].$$

---

**D1.** Si considerino le successioni di numeri reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Sapendo che $a_n \to 0^+$ e $0 \leq b_n \leq 3$, stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

$$1) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty\,; \qquad 2) \quad \lim_{n\to+\infty} a_n b_n^2 = 0\,; \qquad 3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 b_n \text{ converge}.$$

Fornire un controesempio per ogni affermazione errata.

---

**E4.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\arctan(\mathrm{e}^{2x})}{1 + \mathrm{e}^{4x}}\, \mathrm{e}^{2x}\,.$$

Calcolare la primitiva $\varphi$ di $f$ che vale $0$ in $x = 0$ .

---

**E5.** Stabilire se la funzione $f(x, y) = \frac{e^{y^2}-1}{x^2+y^2-2x+1}$ è prolungabile con continuità nel punto $P_0 = (1, 0)$ .

---

**E6.** Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 3y'(x) + 2x e^{y(x)} = 0\,, \\ y(0) = \log(1/2)\,. \end{cases}$$

---

**D2.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x^2 + 1)\arctan[y(x)]\,, \\ y(0) = 3\,. \end{cases}$$

Stabilire, giustificando la risposta, ma senza risolvere l'equazione esplicitamente, se la soluzione $y(x)$ può avere un punto di massimo per $x \geq 0$ .

---

| Spazio riservato alla commissione | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $E1.$ | $E2.$ | $E3.$ | $D1.$ | |
| | $E4.$ | $E5.$ | $E6.$ | $D2.$ | totale |

| Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐ | **TEMA/B** |
|---|---|
| ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐ | Cognome e nome (in stampatello) |
| Appello del 10 luglio 2009 | Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐ |

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

**E1.** Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) z = 0\,.$$

---

**E2.** Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+3x)}{x} & \text{se } x > 0; \\ |x+3| + \sqrt[3]{(x+2)^2} & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

---

**E3.** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^4 \left[\log^2\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) - \frac{9}{n^4}\right]\,.$$

---

**D1.** Si considerino le successioni di numeri reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Sapendo che $0 \le a_n \le 4$ e $b_n \to +\infty$, stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

$$1)\quad \lim_{n\to+\infty} b_n a_n = +\infty\,; \qquad 2)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n^2} \text{ converge}\,; \qquad 3)\quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0\,.$$

Fornire un controesempio per ogni affermazione errata.

---

**E4.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\cos\left(e^{2\arctan x}\right)}{1+x^2}\, e^{2\arctan x}\,.$$

Calcolare la primitiva $\varphi$ di $f$ che vale $0$ in $x = 0$ .

---

**E5.** Stabilire se la funzione $f(x, y) = \frac{\log(1+x^2)}{x^2+y^2-2y+1}$ è prolungabile con continuità nel punto $P_0 = (0, 1)$ .

---

**E6.** Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'(x) - 3x\mathrm{e}^{-y(x)} = 0\,, \\ y(0) = -\log 2\,. \end{cases}$$

---

**D2.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -(2 + x^4)\log[1 + y(x)]\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Stabilire, giustificando la risposta, ma senza risolvere l'equazione esplicitamente, se la soluzione $y(x)$ può avere un punto di massimo per $x \leq 0$ .

---

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Spazio riservato alla commissione | $E1.$ | $E2.$ | $E3.$ | $D1.$ | |
| | $E4.$ | $E5.$ | $E6.$ | $D2.$ | totale |

| | |
|---|---|
| Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐ | **TEMA/C** |
| ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐ | Cognome e nome (in stampatello) |
| Appello del 10 luglio 2009 | Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐ |

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

**E1.** Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^7 - \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) z^4 = 0 \,.$$

---

**E2.** Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+4x)}{2x} & \text{se } x > 0; \\ |x+2| + \sqrt[5]{(x+3)^4} & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

---

**E3.** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^{5/2} \left[ \log^2\left(1 + \frac{2}{n^{3/2}}\right) - \frac{4}{n^3} \right] .$$

---

**D1.** Si considerino le successioni di numeri reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ . Sapendo che $0 \le a_n \le 4$ e $b_n \to +\infty$ , stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

$$1) \quad \lim_{n\to+\infty} b_n a_n = +\infty \,; \qquad 2) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n^2} \text{ converge} \,; \qquad 3) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0 \,.$$

Fornire un controesempio per ogni affermazione errata.

---

**E4.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^{3\arctan x}}{(1+x^2)\cos^2\left(e^{3\arctan x}\right)} \,.$$

Calcolare la primitiva $\varphi$ di $f$ che vale $0$ in $x = 0$ .

---

**E5.** Stabilire se la funzione $f(x,y) = \frac{\log(1+4x^3)}{(x^2+y^2-4y+4)^{3/2}}$ è prolungabile con continuità nel punto $P_0 = (0,2)$ .

---

**E6.** Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 4y'(x) - 3x^2 \mathrm{e}^{-y(x)} = 0\,, \\ y(0) = -\log 3\,. \end{cases}$$

---

**D2.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = -(2+x^4)\log[1+y(x)]\,, \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

Stabilire, giustificando la risposta, ma senza risolvere l'equazione esplicitamente, se la soluzione $y(x)$ può avere un punto di massimo per $x \leq 0$ .

---

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Spazio riservato alla commissione | $E1.$ | $E2.$ | $E3.$ | $D1.$ | |
| | $E4.$ | $E5.$ | $E6.$ | $D2.$ | totale |

| | |
|---|---|
| Analisi I - 12 CFU (h. 2.30) ☐<br><br>ANALISI I (h. 2) I Mod. ☐ II Mod. ☐<br><br>Appello del 10 luglio 2009 | **TEMA/D**<br><br>Cognome e nome (in stampatello)<br><br>Corso di laurea: Informatica ☐ Automatica ☐ |

Barrare la casella corrispondente all'esame ed al corso di laurea di competenza.

Coloro che sostengono l'esame del Mod. I **NON** devono svolgere gli esercizi E4/E5/E6/D2, coloro che sostengono l'esame del Mod. II **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E2/E3/D1, coloro che sostengono l'esame da CFU 12 oppure 5+5 **NON** devono svolgere gli esercizi E1/E5/D1.

**E1.** Determinare le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione

$$z^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) z = 0\,.$$

---

**E2.** Studiare la continuità e la derivabilità della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|(e^{4x}-1)}{2x} & \text{se } x < 0; \\ \sqrt[5]{x-1} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$

---

**E3.** Determinare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{n}\left[\left(e^{3/\sqrt{n}} - 1\right)^2 - \frac{9}{n}\right].$$

---

**D1.** Si considerino le successioni di numeri reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$. Sapendo che $a_n \to 0^+$ e $0 \leq b_n \leq 3$, stabilire, giustificando la risposta, quali tra le seguenti affermazioni sono vere:

$$1) \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = +\infty\,; \qquad 2) \quad \lim_{n\to+\infty} a_n b_n^2 = 0\,; \qquad 3) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2 b_n \text{ converge}.$$

Fornire un controesempio per ogni affermazione errata.

---

**E4.** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{(1+e^{6x})\arctan(e^{3x})}\,.$$

Calcolare la primitiva $\varphi$ di $f$ che vale $0$ in $x = 0$ .

---

**E5.** Stabilire se la funzione $f(x,y) = \frac{e^{2y^3}-1}{(x^2+y^2-4x+4)^{3/2}}$ è prolungabile con continuità nel punto $P_0 = (2,0)$ .

---

**E6.** Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 5y'(x) + 3x^2 e^{y(x)} = 0\,, \\ y(0) = \log(1/3)\,. \end{cases}$$

---

**D2.** Si consideri il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (x^2+1)\arctan[y(x)]\,, \\ y(0) = 3\,. \end{cases}$$

Stabilire, giustificando la risposta, ma senza risolvere l'equazione esplicitamente, se la soluzione $y(x)$ può avere un punto di massimo per $x \geq 0$ .

---

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Spazio riservato alla commissione | $E1.$ | $E2.$ | $E3.$ | $D1.$ | |
| | $E4.$ | $E5.$ | $E6.$ | $D2.$ | totale |