SOLUZIONI COMPITO del 10/07/2009
ANALISI 1 - INFORMATICA 12 CFU + AUTOMATICA 5+5 CFU
ANLISI 1 (I MODULO) - INFORMATICA + AUTOMATICA 5 CFU

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che possiamo scrivere $0 = z^6 - \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z^2 = \left[z^4 - \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right]z^2$. Pertanto, le soluzioni richieste saranno date dall'unione delle soluzioni delle due equazioni $z^4 - \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 0$ e $z^2 = 0$; la seconda ha come soluzione $z = 0$, mentre la prima ha come soluzioni le 4 radici quarte del numero complesso $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$. Poiché $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i = \mathrm{e}^{i\pi/3}$, si ricava

$$\sqrt[4]{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{i\pi/3}} = \{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}};\quad \mathrm{e}^{i\frac{7}{12}\pi};\quad \mathrm{e}^{i\frac{13}{12}\pi};\quad \mathrm{e}^{i\frac{19}{12}\pi}\}.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_1 = 0$, $\quad z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}$, $\quad z_3 = \mathrm{e}^{i\frac{7}{12}\pi}$, $\quad z_4 = \mathrm{e}^{i\frac{13}{12}\pi}$, $\quad z_5 = \mathrm{e}^{i\frac{19}{12}\pi}$.

Esercizio 2

La funzione proposta è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e derivabile su tutto $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,2\}$, in quanto ottenuta attraverso operazioni algebriche e composizione di funzioni continue e derivabili. Pertanto, cominciamo a studiare la continuità in $x = 0$. Utilizzando lo sviluppo asintotico $\mathrm{e}^{3x}-1 \sim 3x$, otteniamo

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \sqrt[3]{x-2} = -\sqrt[3]{2}\,;\\ &\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x+1|(\mathrm{e}^{3x}-1)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{3x}{x} = 3\,;\end{aligned}\right\} \quad\Longrightarrow\quad f \text{ ha un salto in } x = 0.$$

Poiché f non è continua in $x = 0$, essa non sarà neppure derivabile in tale punto. Resta, quindi, da studiare la derivabilità di f nei punti $x = -1$ e $x = 2$. Calcolando la derivata in $\mathbb{R}\setminus\{-1,0,2\}$ si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{[sign(x+1)(\mathrm{e}^{3x}-1)+3|x+1|\mathrm{e}^{3x}]x - |x+1|(\mathrm{e}^{3x}-1)}{x^2} & x<-1, \quad -1<x<0;\\[2ex] \dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-2)^2}} & 0<x<2, \quad x>2.\end{cases}$$

Pertanto,
$$\begin{aligned}&\lim_{x\to -1^\pm} f'(x) = \mp(\mathrm{e}^{-3}-1) && \Longrightarrow && x=-1 \text{ è punto angoloso};\\ &\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = +\infty && \Longrightarrow && x=2 \text{ è punto di flesso a tangente verticale.}\end{aligned}$$

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x\mapsto \mathrm{e}^x$, con $x = 2/n$, otteniamo

$$\left(\mathrm{e}^{2/n}-1\right)^2 = \left(1+\frac{2}{n}+\frac{4}{2n^2}+o(1/n^2)-1\right)^2 = \frac{4}{n^2}+\frac{8}{n^3}+o(1/n^3)\,.$$

Pertanto, si ricava $a_n := n^2\left[\left(\mathrm{e}^{2/n}-1\right)^2-\frac{4}{n^2}\right] \sim n^2\left(\frac{4}{n^2}+\frac{8}{n^3}-\frac{4}{n^2}\right) = \frac{8}{n}$. Dal criterio del confronto asintotico con la serie armonica otteniamo che la serie proposta è divergente.

Domanda 1

L' unica affermazione corretta è la 2) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione limitata (nel nostro caso $\{b_n^2\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n = 1/n$ e $b_n = 1/n^2$ si contraddice l' affermazione 1), mentre prendendo $a_n = 1/\sqrt{n}$ e $b_n \equiv 3$ si contraddice la 3).

Esercizio 4
Osserviamo che la primitiva richiesta sarà data da

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\arctan(\mathrm{e}^{2t})}{1+\mathrm{e}^{4t}}\,\mathrm{e}^{2t}\,dt = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\arctan(\mathrm{e}^{2x})} s\,ds = \frac{1}{4}s^2\Big|_{\pi/4}^{\arctan(\mathrm{e}^{2x})} = \frac{[\arctan(\mathrm{e}^{2x})]^2}{4} - \frac{\pi^2}{64}\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato il cambiamento di variabile $s = \arctan(\mathrm{e}^{2t})$, da cui $ds = 2\frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^{4t}}\,dt$, $s(0) = \pi/4$, $s(x) = \arctan(\mathrm{e}^{2x})$.

Esercizio 5
Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\mathrm{e}^{y^2}-1}{x^2+y^2-2x+1} = \lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^2}{(x-1)^2+y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\sin^2\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \sin^2\theta = \nexists\,,$$

dove, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $\mathrm{e}^{y^2} - 1 \sim y^2$, per $y \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(1,0)$. Poiché il limite non esiste, in quanto dipende da θ (cioè dalla direzione lungo la quale lo si calcola), si ricava che la funzione non può essere prolungata con continuità in P_0.

Esercizio 6
Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = -\frac{2}{3}x\mathrm{e}^{y(x)}$. Tale equazione non ammette soluzioni singolari; separando le variabili si ottiene

$$-\mathrm{e}^{-y} = \int \mathrm{e}^{-y}\,dy = -\frac{2}{3}\int x\,dx = -\frac{1}{3}x^2 + C \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{e}^{-y(x)} = \frac{1}{3}x^2 + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = -\log\left(\frac{x^2}{3} + C\right)$. Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$\log(1/2) = y(0) = -\log(C) \qquad \Longrightarrow \qquad C = 2\,;$$

pertanto la soluzione cercata sarà $y(x) = -\log\left(\frac{x^2}{3} + 2\right)$.

Domanda 2
La soluzione del problema di Cauchy proposto non può avere punti di massimo per $x \geq 0$. Infatti, per ipotesi, $y(0) = 3 > 0$ e $y'(0) = \arctan 3 > 0$, quindi la soluzione parte da $x = 0$ con segno positivo e monotonia crescente e, dall'equazione, si ricava che il segno della derivata prima è concorde con quello di $y(x)$. Quindi la soluzione non cambia monotonia fintanto che non diventa negativa, ma la funzione diventa negativa sono dove decresce. Pertanto, per tutti i valori di $x \geq 0$ per cui la soluzione è definita, essa resterà positiva e strettamente crescente.

TEMA B

Esercizio 1
Osserviamo che possiamo scrivere $0 = z^4 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) z = \left[z^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right] z$. Pertanto, le soluzioni richieste saranno date dall'unione delle soluzioni delle due equazioni $z^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0$ e $z = 0$; la seconda ha come soluzione $z = 0$, mentre la prima ha come soluzioni le 3 radici terze del numero complesso $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Poiché $-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i = e^{i5\pi/4}$, si ricava

$$\sqrt[3]{-\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i} = \sqrt[3]{e^{i5/4}\pi} = \{e^{i\frac{5}{12}\pi}; \quad e^{i\frac{13}{12}\pi}; \quad e^{i\frac{21}{12}\pi}\}.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_1 = 0, \quad z_2 = e^{i\frac{5\pi}{12}}, \quad z_3 = e^{i\frac{13}{12}\pi}, \quad z_4 = e^{i\frac{21}{12}\pi}$.

Esercizio 2
La funzione proposta è una funzione continua su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile su tutto $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$, in quanto ottenuta attraverso operazioni algebriche e composizione di funzioni continue e derivabili. Pertanto, cominciamo a studiare la continuità in $x = 0$. Utilizzando lo sviluppo asintotico $\log(1+3x) \sim 3x$, otteniamo

$$\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} |x+3| + \sqrt[3]{(x+2)^2} = 3 + \sqrt[3]{4}\,; \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+3x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x}{x} = 3\,; \end{array} \qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ ha un salto in } x = 0.$$

Poiché f non è continua in $x = 0$, essa non sarà neppure derivabile in tale punto. Resta, quindi, da studiare la derivabilità di f nei punti $x = -3$ e $x = -2$. Calcolando la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$ si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{3x}{1+3x} - \log(1+3x)}{x^2} & x > 0; \\ sign(x+3) + \dfrac{2}{3(x+2)^{1/3}} & -\infty < x < -3, \quad -3 < x < -2, \quad -2 < x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Pertanto,} \quad \begin{array}{lll} \lim_{x\to -3^\pm} f'(x) = \pm 1 - \frac{2}{3} & \Longrightarrow & x = -3 \text{ è punto angoloso;} \\ \lim_{x\to -2^\pm} f'(x) = \pm\infty & \Longrightarrow & x = -2 \text{ è punto di cuspide.} \end{array}$$

Esercizio 3
Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = 3/n^2$, otteniamo

$$\log^2\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) = \left(\frac{3}{n^2} - \frac{9}{2n^4} + o(1/n^4)\right)^2 = \frac{9}{n^4} - \frac{27}{n^6} + o(1/n^6)\,.$$

Pertanto, si ricava $a_n := n^4\left[\log^2\left(1 + \frac{3}{n^2}\right) - \frac{9}{n^4}\right] \sim n^4\left(\frac{9}{n^4} - \frac{27}{n^6} - \frac{9}{n^4}\right) = -\frac{27}{n^2}$. Dal criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, otteniamo che la serie proposta è convergente.

Domanda 1
L' unica affermazione corretta è la 3) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione limitata (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{1/b_n\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n = 1/n$ e $b_n = \sqrt{n}$ si contraddice l' affermazione 1), mentre prendendo $a_n \equiv 4$ e $b_n = \sqrt{n}$ si contraddice la 2).

Esercizio 4
Osserviamo che la primitiva richiesta sarà data da

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{\cos\left(e^{2\arctan t}\right)}{1+t^2}\, e^{2\arctan t}\, dt = \frac{1}{2}\int_1^{e^{2\arctan x}} \cos s\, ds = \frac{1}{2}\sin s\Big|_1^{e^{2\arctan x}} = \frac{1}{2}[\sin\left(e^{2\arctan x}\right) - \sin 1]\,,$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato il cambiamento di variabile $s = e^{2\arctan t}$, da cui $ds = 2\frac{e^{2\arctan t}}{1+t^2}\, dt$, $s(0) = 1$, $s(x) = e^{2\arctan x}$.

Esercizio 5
Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{\log(1+x^2)}{x^2+y^2-2y+1} = \lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2}{x^2+(y-1)^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \cos^2\theta = \nexists\,,$$

dove, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $\log(1+x^2) \sim x^2$, per $x \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(0,1)$. Poiché il limite non esiste, in quanto dipende da θ (cioè dalla direzione lungo la quale lo si calcola), si ricava che la funzione non può essere prolungata con continuità in P_0.

Esercizio 6
Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = \frac{3}{2}xe^{-y(x)}$. Tale equazione non ammette soluzioni singolari; separando le variabili si ottiene

$$e^y = \int e^y\, dy = \frac{3}{2}\int x\, dx = \frac{3}{4}x^2 + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \log\left(\frac{3x^2}{4} + C\right)$. Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$-\log(2) = y(0) = \log(C) \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1/2\,;$$

pertanto la soluzione cercata sarà $y(x) = \log\left(\frac{3x^2}{4} + 1/2\right)$.

Domanda 2
La soluzione del problema di Cauchy proposto non può avere punti di massimo per $x \le 0$. Infatti, per ipotesi, $y(0) = 1 > 0$ e $y'(0) = -2\log 2 < 0$, quindi la soluzione arriva in $x = 0$ con segno positivo e monotonia decrescente e, dall'equazione, si ricava che il segno della derivata prima è discorde con quello di $y(x)$. Quindi la soluzione non cambia monotonia fintanto che non diventa negativa, ma la funzione può diventare negativa solo dove cresce. Pertanto, per tutti i valori di $x \le 0$ per cui la soluzione è definita, essa resterà positiva e strettamente decrescente.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che possiamo scrivere $0 = z^7 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) z^4 = \left[z^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right] z^4$. Pertanto, le soluzioni richieste saranno date dall'unione delle soluzioni delle due equazioni $z^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 0$ e $z^4 = 0$; la seconda ha come soluzione $z = 0$, mentre la prima ha come soluzioni le 3 radici terze del numero complesso $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$. Poiché $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \mathrm{e}^{i\pi/4}$, si ricava

$$\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i} = \sqrt[3]{\mathrm{e}^{i\pi/4}} = \{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}; \quad \mathrm{e}^{i\frac{9}{12}\pi} = \mathrm{e}^{i\frac{3}{4}\pi}; \quad \mathrm{e}^{i\frac{17}{12}\pi}\}.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_1 = 0, \quad z_2 = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{12}}, \quad z_3 = \mathrm{e}^{i\frac{3}{4}\pi}, \quad z_4 = \mathrm{e}^{i\frac{17}{12}\pi}$.

Esercizio 2

La funzione proposta è una funzione continua su tutto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e derivabile su tutto $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$, in quanto ottenuta attraverso operazioni algebriche e composizione di funzioni continue e derivabili. Pertanto, cominciamo a studiare la continuità in $x = 0$. Utilizzando lo sviluppo asintotico $\log(1+4x) \sim 3x$, otteniamo

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} |x+2| + \sqrt[5]{(x+3)^4} = 2 + \sqrt[5]{81}\,; \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\log(1+4x)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{4x}{2x} = 2\,; \end{array}\right. \quad \Longrightarrow \quad f \text{ ha un salto in } x = 0.$$

Poiché f non è continua in $x = 0$, essa non sarà neppure derivabile in tale punto. Resta, quindi, da studiare la derivabilità di f nei punti $x = -3$ e $x = -2$. Calcolando la derivata in $\mathbb{R} \setminus \{-3, -2, 0\}$ si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\frac{8x}{1+4x} - 2\log(1+4x)}{4x^2} & x > 0; \\ sign(x+2) + \dfrac{4}{5(x+3)^{1/5}} & -\infty < x < -3, \quad -3 < x < -2, \quad -2 < x < 0. \end{cases}$$

$$\text{Pertanto,} \quad \begin{array}{lll} \lim\limits_{x\to -2^\pm} f'(x) = \pm 1 + \dfrac{4}{5} & \Longrightarrow & x = -2 \text{ è punto angoloso;} \\ \lim\limits_{x\to -3^\pm} f'(x) = \pm\infty & \Longrightarrow & x = -3 \text{ è punto di cuspide.} \end{array}$$

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x \mapsto \log(1+x)$, con $x = 2/n^{3/2}$, otteniamo

$$\log^2\left(1 + \frac{2}{n^{3/2}}\right) = \left(\frac{2}{n^{3/2}} - \frac{2}{n^3} + o(1/n^3)\right)^2 = \frac{4}{n^3} - \frac{8}{n^{9/2}} + o(1/n^{9/2})\,.$$

Pertanto, si ricava $a_n := n^{5/2}\left[\log^2\left(1 + \frac{2}{n^{3/2}}\right) - \frac{4}{n^3}\right] \sim n^{5/2}\left(\frac{4}{n^3} - \frac{8}{n^{9/2}} - \frac{4}{n^3}\right) = -\frac{8}{n^2}$. Dal criterio del confronto asintotico con la serie armonica generalizzata di esponente $2 > 1$, otteniamo che la serie proposta è convergente.

Domanda 1

L' unica affermazione corretta è la 3) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione limitata (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{1/b_n\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n = 1/n$ e $b_n = \sqrt{n}$ si contraddice l' affermazione 1), mentre prendendo $a_n \equiv 4$ e $b_n = \sqrt{n}$ si contraddice la 2).

Esercizio 4
Osserviamo che la primitiva richiesta sarà data da

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{3\arctan t}}{(1+t^2)\cos^2\left(e^{3\arctan t}\right)}\,dt = \frac{1}{3}\int_1^{e^{3\arctan x}} \frac{1}{\cos^2 s}\,ds = \frac{1}{3}\tan s\Big|_1^{e^{3\arctan x}} = \frac{\tan\left(e^{3\arctan x}\right) - \tan 1}{3},$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato il cambiamento di variabile $s = e^{3\arctan t}$, da cui $ds = 3\frac{e^{3\arctan t}}{1+t^2}\,dt$, $s(0) = 1$, $s(x) = e^{3\arctan x}$.

Esercizio 5
Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\log(1+4x^3)}{(x^2+y^2-4y+4)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{4x^3}{[x^2+(y-2)^2]^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{4\rho^3\cos^3\theta}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0^+} 4\cos^3\theta = \nexists\,,$$

dove, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $\log(1+4x^3) \sim 4x^3$, per $x \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(0,2)$. Poiché il limite non esiste, in quanto dipende da θ (cioè dalla direzione lungo la quale lo si calcola), si ricava che la funzione non può essere prolungata con continuità in P_0.

Esercizio 6
Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = \frac{3}{4}x^2 e^{-y(x)}$. Tale equazione non ammette soluzioni singolari; separando le variabili si ottiene

$$e^y = \int e^y\,dy = \frac{3}{4}\int x^2\,dx = \frac{1}{4}x^3 + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = \log\left(\frac{x^3}{4} + C\right)$. Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$-\log(3) = y(0) = \log(C) \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1/3\,;$$

pertanto la soluzione cercata sarà $y(x) = \log\left(\frac{x^3}{4} + 1/3\right)$.

Domanda 2
La soluzione del problema di Cauchy proposto non può avere punti di massimo per $x \le 0$. Infatti, per ipotesi, $y(0) = 1 > 0$ e $y'(0) = -2\log 2 < 0$, quindi la soluzione arriva in $x = 0$ con segno positivo e monotonia decrescente e, dall'equazione, si ricava che il segno della derivata prima è discorde con quello di $y(x)$. Quindi la soluzione non cambia monotonia fintanto che non diventa negativa, ma la funzione può diventare negativa solo dove cresce. Pertanto, per tutti i valori di $x \le 0$ per cui la soluzione è definita, essa resterà positiva e strettamente decrescente.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che possiamo scrivere $0 = z^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)z = \left[z^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\right]z$. Pertanto, le soluzioni richieste saranno date dall'unione delle soluzioni delle due equazioni $z^4+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=0$ e $z=0$; la seconda ha come soluzione $z=0$, mentre la prima ha come soluzioni le 4 radici quarte del numero complesso $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. Poiché $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i = \mathrm{e}^{i7\pi/6}$, si ricava

$$\sqrt[4]{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i} = \sqrt[4]{\mathrm{e}^{i7\pi/6}} = \{\mathrm{e}^{i\frac{7}{24}\pi};\quad \mathrm{e}^{i\frac{19}{24}\pi};\quad \mathrm{e}^{i\frac{31}{24}\pi};\quad \mathrm{e}^{i\frac{43}{24}\pi}\}.$$

Quindi le soluzioni cercate saranno $z_1=0,\quad z_2=\mathrm{e}^{i\frac{7}{24}\pi},\quad z_3=\mathrm{e}^{i\frac{19}{24}\pi},\quad z_4=\mathrm{e}^{i\frac{31}{24}\pi},\quad z_5=\mathrm{e}^{i\frac{43}{24}\pi}$.

Esercizio 2

La funzione proposta è una funzione continua su tutto $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ e derivabile su tutto $\mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\}$, in quanto ottenuta attraverso operazioni algebriche e composizione di funzioni continue e derivabili. Pertanto, cominciamo a studiare la continuità in $x=0$. Utilizzando lo sviluppo asintotico $\mathrm{e}^{4x}-1\sim 4x$, otteniamo

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[5]{x-1} = -1\,; \\ \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{|x+2|(\mathrm{e}^{4x}-1)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0^-} 2\dfrac{4x}{2x} = 4\,; \end{array}\right.\qquad \Longrightarrow \qquad f \text{ ha un salto in } x=0.$$

Poiché f non è continua in $x=0$, essa non sarà neppure derivabile in tale punto. Resta, quindi, da studiare la derivabilità di f nei punti $x=-2$ e $x=1$. Calcolando la derivata in $\mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\}$ si ottiene

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{[sign(x+2)(\mathrm{e}^{4x}-1)+4|x+2|\mathrm{e}^{4x}]2x-2|x+2|(\mathrm{e}^{4x}-1)}{4x^2} & x<-2,\quad -2<x<0; \\ \dfrac{1}{5\sqrt[5]{(x-1)^4}} & 0<x<1,\quad x>1. \end{cases}$$

$$\text{Pertanto,}\quad \begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to -2^\pm} f'(x) = \mp\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-8}-1}{4}\right) & \Longrightarrow & x=-2 \text{ è punto angoloso;} \\ \lim\limits_{x\to 1^\pm} f'(x) = +\infty & \Longrightarrow & x=1 \text{ è punto di flesso a tangente verticale.} \end{array}$$

Esercizio 3

Utilizzando lo sviluppo di Mc Laurin al secondo ordine per la funzione $x\mapsto \mathrm{e}^x$, con $x=3/\sqrt{n}$, otteniamo

$$\left(\mathrm{e}^{3/\sqrt{n}}-1\right)^2 = \left(1+\frac{3}{\sqrt{n}}+\frac{9}{2n}+o(1/n)-1\right)^2 = \frac{9}{n}+\frac{27}{n^{3/2}}+o(1/n^{3/2})\,.$$

Pertanto, si ricava $a_n := \sqrt{n}\left[\left(\mathrm{e}^{3/\sqrt{n}}-1\right)^2-\frac{9}{n}\right] \sim \sqrt{n}\left(\frac{9}{n}+\frac{27}{n^{3/2}}-\frac{9}{n}\right) = \frac{27}{n}$. Dal criterio del confronto asintotico con la serie armonica otteniamo che la serie proposta è divergente.

Domanda 1

L' unica affermazione corretta è la 2) poiché, come conseguenza del Teorema dei Carabinieri, si ottiene che il prodotto di una successione infinitesima (nel nostro caso $\{a_n\}$) e di una successione limitata (nel nostro caso $\{b_n^2\}$) dà luogo ad una successione infinitesima. Prendendo, invece, $a_n=1/n$ e $b_n=1/n^2$ si contraddice l' affermazione 1), mentre prendendo $a_n=1/\sqrt{n}$ e $b_n\equiv 3$ si contraddice la 3).

Esercizio 4
Osserviamo che la primitiva richiesta sarà data da

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{e^{3t}}{(1+e^{6t})\arctan(e^{3t})}\,dt = \frac{1}{3}\int_{\pi/4}^{\arctan(e^{3x})} \frac{1}{s}\,ds = \frac{1}{3}\log s\Big|_{\pi/4}^{\arctan(e^{3x})} = \frac{\log\big(\arctan(e^{3x})\big) - \log(\pi/4)}{3},$$

dove, nella seconda uguaglianza, abbiamo utilizzato il cambiamento di variabile $s = \arctan(e^{3t})$, da cui $ds = 3\frac{e^{3t}}{(1+e^{6t})}\,dt$, $s(0) = \pi/4$, $s(x) = \arctan(e^{3x})$.

Esercizio 5
Calcoliamo

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{e^{2y^3}-1}{(x^2+y^2-4x+4)^{3/2}} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{2y^3}{[(x-1)^2+y^2]^{3/2}} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{2\rho^3\sin^3\theta}{\rho^3} = \lim_{\rho\to 0^+} 2\sin^3\theta = \nexists\,,$$

dove, nella prima uguaglianza, abbiamo utilizzato lo sviluppo asintotico $e^{3y^3} - 1 \sim 3y^3$, per $y \to 0$, e nella seconda, abbiamo effettuato un cambiamento di variabile in coordinate polari centrate nel punto $(2,0)$. Poiché il limite non esiste, in quanto dipende da θ (cioè dalla direzione lungo la quale lo si calcola), si ricava che la funzione non può essere prolungata con continuità in P_0.

Esercizio 6
Osserviamo che il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale del primo ordine a variabili separabili, che può essere riscritta nella forma $y'(x) = -\frac{3}{5}x^2 e^{y(x)}$. Tale equazione non ammette soluzioni singolari; separando le variabili si ottiene

$$-e^{-y} = \int e^{-y}\,dy = -\frac{3}{5}\int x^2\,dx = -\frac{1}{5}x^3 + C \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-y(x)} = \frac{1}{5}x^3 + C\,.$$

Quindi l'integrale generale è $y(x) = -\log\left(\frac{x^3}{5} + C\right)$. Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$\log(1/3) = y(0) = -\log(C) \qquad \Longrightarrow \qquad C = 3\,;$$

pertanto la soluzione cercata sarà $y(x) = -\log\left(\frac{x^3}{5} + 3\right)$.

Domanda 2
La soluzione del problema di Cauchy proposto non può avere punti di massimo per $x \geq 0$. Infatti, per ipotesi, $y(0) = 3 > 0$ e $y'(0) = \arctan 3 > 0$, quindi la soluzione parte da $x = 0$ con segno positivo e monotonia crescente e, dall'equazione, si ricava che il segno della derivata prima è concorde con quello di $y(x)$. Quindi la soluzione non cambia monotonia fintanto che non diventa negativa, ma la funzione diventa negativa sono dove decresce. Pertanto, per tutti i valori di $x \geq 0$ per cui la soluzione è definita, essa resterà positiva e strettamente crescente.