SOLUZIONI COMPITO DI AUTOVALUTAZIONE

Esercizio 1. Ponendo $w = z - i$, l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$w^3 = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4} \ .$$

Applicando la formula per le radici di numeri complessi, si ricava

$$w_k = e^{i\frac{-\pi/4+2k\pi}{3}} \qquad k = 0, 1, 2$$

da cui

$$z_0 = i + e^{-i\frac{\pi}{12}} \qquad z_1 = i + e^{i\frac{7\pi}{12}} \qquad z_2 = i + e^{i\frac{5\pi}{4}} \ .$$

Esercizio 2. Ricordando che, per $t \to 0$, si ha $\log(1+t) \sim t$ e $\sin t \sim t$; ponendo $t = 3/n^2 \to 0$, nello sviluppo del logaritmo, e $t = 2/n^2 \to 0$, in quello del seno, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{n^2}\right)}{\sin\left(\frac{2}{n^2}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3/n^2}{2/n^2} = \frac{3}{2} \ .$$

Esercizio 3.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \left(\frac{y}{1+xy} + 3e^{3x+2y}\right)\bigg|_{(x,y)=(0,0)} = 3 \ .$$

Esercizio 4. Ponendo $x = \rho\cos\theta$ e $y = 1 + \rho\sin\theta$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2(y-1)^3}{[x^2+(y-1)^2]^{5/2}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta\cdot\rho^3\sin^3\theta}{\rho^5} = \lim_{\rho\to0^+} \cos^2\theta\cdot\sin^3\theta$$

e quindi il limite proposto non esiste.

Esercizio 5. Passando in coordinate polari centrate nell'origine, si ottiene che l' insieme E si trasforma nell'insieme

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi] \ : \ 1<\rho<2 \ , \ \sin\theta > \cos\theta > 0\} \\ &\quad \cup \{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi] \ : \ 1<\rho<2 \ , \ 0 < -\sqrt{3}\cos\theta < \sin\theta\} \\ &= \{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi] \ : \ 1<\rho<2 \ , \ \pi/4<\theta<\pi/2\} \\ &\quad \cup \{(\rho,\theta)\in[0,+\infty)\times[0,2\pi] \ : \ 1<\rho<2 \ , \ \pi/2<\theta<2\pi/3\}\end{aligned}$$

e quindi

$$\iint_E \frac{y\exp(x/\sqrt{x^2+y^2})}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{E}} \frac{\rho\sin\theta\cdot\exp(\rho\cos\theta/\rho)}{\rho}\,\rho\,d\rho\,d\theta$$

$$= \left(\int_1^2 \rho\,d\rho\right)\left(\int_{\pi/4}^{2\pi/3} \sin\theta\cdot e^{\cos\theta}\,d\theta\right) = \left(\frac{\rho^2}{2}\bigg|_1^2\right)\left(-e^{\cos\theta}\big|_{\pi/4}^{2\pi/3}\right) = \frac{3}{2}\left(e^{1/\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{e}}\right) \ .$$

Esercizio 6. Poiché lungo gli assi $x = 0$ e $y = 1$, la funzione proposta è identicamente nulla, si ha che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,1) \ .$$

Pertanto, per determinare se f è differenziabile in $(0,1)$, dobbiamo verificare se $\lim_{(h,k)\to(0,0)} g(h,k)$ risulta nullo, dove

$$g(h,k) := \frac{[(1+k)^2-1](3h+1)\sin h^5}{(h^4+k^8)\sqrt{h^2+k^2}} \ .$$

D'altra parte

$$|g(h,k)| \sim \frac{2|kh^5|}{(h^4+k^8)\sqrt{h^2+k^2}} \le 2\frac{|kh^5|}{h^4|h|} = 2|k| \to 0 \ .$$

Pertanto, f è differenziabile in $(0,1)$ e quindi è ivi anche continua.

Esercizio 7. L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y \equiv 0$, che non risolve il problema di Cauchy assegnato, e da

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int \mathrm{e}^x \, dx \quad \Longrightarrow \quad -\frac{1}{y(x)} = \mathrm{e}^x + C \quad \Longrightarrow \quad y(x) = -\frac{1}{\mathrm{e}^x + C}, \quad C \in I\!R.$$

La condizione iniziale implica $1 = -\frac{1}{1+C}$, da cui $C = -2$, e quindi la soluzione cercata è

$$y(x) = \frac{1}{2 - \mathrm{e}^x} \qquad \text{definita per } \; x < \log 2 \; .$$

Domanda 1. Poiché, prendendo $x_n = \frac{3}{2n\pi} \to 0$, per $n \to +\infty$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} [\mathrm{e}^{-\frac{3}{2n\pi}} + \cos(2n\pi)] = 2 \; ,$$

mentre prendendo $x_n = \frac{6}{(2n+1)\pi} \to 0$, per $n \to +\infty$, si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\mathrm{e}^{-\frac{6}{(2n+1)\pi}} + \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right)\right] = 1 \; ,$$

il limite proposto non esiste.

Domanda 2. Per la definizione di derivabilità, vedere il libro di testo.

Domanda 3. Ponendo $k(2k+1) = 37$, si ottiene $2k^2 + k - 37 = 0$, da cui

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 296}}{4} \notin I\!N \; ;$$

pertanto $f^{(37)}(2) = 0$.