SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1. Poiché $f \in C^1(\mathbb{R})$ ed

$$f'(x) = (1-2x)\mathrm{e}^{-x(x-1)} \ \substack{\leq \\ >}\ 0 \quad \iff \quad x \ \substack{\geq \\ <}\ \frac{1}{2},$$

l'unico punto di massimo locale è $x = \frac{1}{2}$, e non esistono punti di minimo locale.

Esercizio 2. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(n - \frac{4}{n}\right)\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 3. Poiché

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1},$$

si ottiene

$$\int_0^1 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx = \Big[2\log|x+2| - \log|x+1|\Big]_0^1 = \log\frac{9}{8}.$$

Esercizio 4. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(3x^2 \log y, \frac{x^3}{y}\right),$$

e quindi $\nabla f(1, \frac{1}{\mathrm{e}}) = (-3, \mathrm{e})$.

Esercizio 5. L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y \equiv 0$ e da

$$-\int \frac{dy}{y^2} = \int dt \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{1}{t+C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La condizione iniziale implica $C = \frac{1}{n}$, e quindi

$$y_n(t) = \frac{1}{t+\frac{1}{n}},\ t \in (-\frac{1}{n}, +\infty); \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} y_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Esercizio 6. Passando in coordinate polari si ottiene

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} r^2 \cos\theta\,d\theta\,dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{\sqrt{2}} \Big[\sin\theta\Big]_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{3}(4-\sqrt{2}).$$

Esercizio 7. Per stabilire se l'integrale improprio proposto esiste finito, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di 0^+ ed in un intorno di 1^-. Otteniamo

$$U(0^+) \quad f(x) \sim \frac{1}{x^{2\alpha+1}\log^{-1} x} \quad \Longrightarrow \text{ l'integrale esiste finito se } \alpha < 0;$$

$$U(1^-) \quad f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^{2\alpha+1}\log^{-1}[1+(x-1)]} \sim -\frac{1}{(1-x)^{2\alpha}} \quad \Longrightarrow \text{ l'integrale esiste finito se } \alpha < 1/2.$$

Pertanto, l'integrale improprio proposto esiste finito per $\alpha < 0$.

Domanda 1. Si ha

$$f(x+T) = \cos(\frac{x}{3} + \frac{T}{3}) + \sin(x+T) = f(x) = \cos(\frac{x}{3}) + \sin(x) \quad \forall\, x \in I\!R$$

se e solo se

$$\begin{cases} T = 6h\pi \\ T = 2k\pi \end{cases} \quad \text{per qualche } h, k \in \mathbf{Z},$$

che è verificata per $k = 3h$; pertanto ($h = 1$, $k = 3$) $T = 6\pi$.

Domanda 2. No. Infatti

$$\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty \qquad \text{mentre} \quad f(0) = 0.$$

Domanda 3. È sufficiente osservare che

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 1 \neq \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1. Poiché $f \in C^1(I\!R)$ ed

$$f'(x) = \frac{1-2x}{1+x^2(x-1)^2} \quad \substack{\leq \\ >} \quad 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \quad \substack{\geq \\ <} \quad \frac{1}{2},$$

l'unico punto di massimo locale è $x = \frac{1}{2}$, e non esistono punti di minimo locale.

Esercizio 2. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{n}\right) \sin\left(\frac{5}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{5}{n}\right) = \frac{5}{3}.$$

Esercizio 3. Poiché

$$\frac{2x}{(x+1)(x-3)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-3}\right),$$

si ottiene

$$\int_1^2 \frac{2x}{(x+1)(x-3)}\, dx = \left[\frac{1}{2}\log|x+1| + \frac{3}{2}\log|x-3|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\log\frac{3}{16}.$$

Esercizio 4. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(y^2 \cos x, 2y \sin x\right),$$

e quindi $\nabla f(\pi, -1) = (-1, 0)$.

Esercizio 5. L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y \equiv 0$ e da

$$\int \frac{dy}{y} = -\int n\, dt \quad \Longrightarrow \quad y(t) = C\mathrm{e}^{-nt}, \quad C \in I\!R.$$

La condizione iniziale implica $C = n$, e quindi

$$y_n(t) = n\mathrm{e}^{-nt},\ t \in I\!R; \qquad \lim_{n\to\infty} y_n(1) = \lim_{n\to\infty} n\mathrm{e}^{-n} = 0.$$

Esercizio 6. Passando in coordinate polari si ottiene

$$\iint_D y\, dx\, dy = \int_1^{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{\sqrt{3}} \left[-\cos\theta\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} = \frac{\sqrt{2}}{6}(3\sqrt{3} - 1).$$

Esercizio 7. Per stabilire se l'integrale improprio proposto esiste finito, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di 0^+ ed in un intorno di $\frac{1}{2}^-$. Otteniamo

$$U(0^+) \quad f(x) \sim \frac{1}{x^{5-\alpha}\sin x} \sim \frac{1}{x^{6-\alpha}} \quad \Longrightarrow \text{l'integrale esiste finito se } \alpha > 5;$$

$$U(\frac{1}{2}^-) \quad f(x) \sim \frac{(1/2)^{\alpha-5}}{\sin(1/2)(1-2x)^{5-\alpha}} \quad \Longrightarrow \text{l'integrale esiste finito se } \alpha > 4.$$

Pertanto l'integrale improprio proposto esiste finito per $\alpha > 5$.

Domanda 1. Si ha

$$f(x+T) = \cos(2x+2T) - \sin(x+T) = f(x) = \cos(2x) - \sin(x) \quad \forall\, x \in I\!R$$

se e solo se

$$\begin{cases} 2T = 2h\pi \\ T = 2k\pi \end{cases} \quad \text{per qualche } h, k \in \mathbf{Z},$$

che è verificata per $2k = h$; pertanto ($k = 1$, $h = 2$) $T = 2\pi$.

Domanda 2. No. Infatti
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \qquad \text{mentre} \quad f(1) = 1.$$

Domanda 3. È sufficiente osservare che
$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 2 \neq \lim_{x\to 0} f(x,0) = 0.$$

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1. Poiché $f \in C^1(\mathbb{R})$ ed

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} e^{-\frac{1}{x^2+1}} \underset{>}{\overset{\leq}{=}} 0 \iff x \underset{>}{\overset{\leq}{=}} 0,$$

l'unico punto di minimo locale è $x = 0$, e non esistono punti di massimo locale.

Esercizio 2. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} (n^4+1)\left(1 - \cos\frac{3}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} n^4 \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{3}{n^2}\right)^2 = \frac{9}{2}.$$

Esercizio 3. Poiché

$$\frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x}\right),$$

si ottiene

$$\int_1^2 \frac{x-1}{x(x+2)}\,dx = \left[\frac{3}{2}\log|x+2| - \frac{1}{2}\log|x|\right]_1^2 = \frac{1}{2}\log\frac{32}{27}.$$

Esercizio 4. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(y^2 - \frac{1}{x}, 2xy\right),$$

e quindi $\nabla f(1,2) = (3,4)$.

Esercizio 5. L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y \equiv 0$ e da

$$-\int \frac{dy}{y^3} = \int n dt \implies y(t) = \sqrt{\frac{1}{2nt + C}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La condizione iniziale implica $C = 1$, e quindi

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{1}{2nt+1}},\ t \in (-\frac{1}{2n}, +\infty); \qquad \lim_{n\to\infty} (y_n(1))^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} = 0.$$

Esercizio 6. Passando in coordinate polari si ottiene

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_{\sqrt{2}}^{2} \int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} r^2 \cos\theta\,d\theta\,dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_{\sqrt{2}}^{2} \left[\sin\theta\right]_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{1}{4}\pi} = \frac{2}{3}(4-\sqrt{2})\sqrt{2}.$$

Esercizio 7. Per stabilire l'esistenza dell'integrale improprio proposto, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di 0^+ ed in un intorno di $+\infty$. Otteniamo

$$\begin{array}{lll} U(0^+) & f(x) \sim \dfrac{x^2}{x^\alpha} = \dfrac{1}{x^{\alpha-2}} & \implies \text{l'integrale esiste finito se } \alpha < 3; \\ U(+\infty) & f(x) \sim \dfrac{2\log x}{x^{3+\alpha}} \sim \dfrac{2}{x^{3+\alpha}\log^{-1} x} & \implies \text{l'integrale esiste finito se } \alpha > -2. \end{array}$$

Pertanto l'integrale improprio proposto esiste finito per $-2 < \alpha < 3$.

Domanda 1. Si ha

$$f(x+T) = \cos(x+T) - \sin(\frac{x}{2} + \frac{T}{2}) = f(x) = \cos(x) - \sin(\frac{x}{2}) \quad \forall\, x \in I\!R$$

se e solo se

$$\begin{cases} T = 4h\pi \\ T = 2k\pi \end{cases} \quad \text{per qualche } h, k \in \mathbf{Z},$$

che è verificata per $k = 2h$; pertanto ($h = 1$, $k = 2$) $T = 4\pi$.

Domanda 2. No. Infatti

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 1 \qquad \text{mentre} \quad f(2) = 3.$$

Domanda 3. È sufficiente osservare che

$$\lim_{y \to 0} f(0, y) = -1 \neq \lim_{x \to 0} f(x, 0) = 2.$$

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1. Poiché $f \in C^1(\mathbb{R})$ ed

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^2} \frac{2x}{(x^2+1)^2} \ \substack{\leq \\ = \\ >} \ 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x \ \substack{\leq \\ = \\ >} \ 0,$$

l'unico punto di minimo locale è $x = 0$, e non esistono punti di massimo locale.

Esercizio 2. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} \left(5n - \frac{1}{n^2}\right) \log\left(1 - \frac{4}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 5n \cdot \left(-\frac{4}{n}\right) = -20.$$

Esercizio 3. Poiché

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}\right),$$

si ottiene

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+2)(x-2)}\,dx = \left[\frac{1}{4}\log|x-2| - \frac{1}{4}\log|x+2|\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{2}\log 3.$$

Esercizio 4. Si ha

$$\nabla f(x,y) = (y - \cos y, x + x\sin y)\,,$$

e quindi $\nabla f(1,\pi) = (1+\pi, 1)$.

Esercizio 5. L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y \equiv 0$ e da

$$-\int \frac{dy}{y^{n+1}} = \int dt \quad \Longrightarrow \quad y(t) = (nt + C)^{-\frac{1}{n}}\,, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La condizione iniziale implica $C = 1$, e quindi

$$y_n(t) = (1+nt)^{-\frac{1}{n}}\,,\ t \in (-\frac{1}{n}, +\infty); \qquad \lim_{n\to\infty} y_n(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} = 1.$$

Esercizio 6. Passando in coordinate polari si ottiene

$$\iint_D y\,dx\,dy = \int_1^2 \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi} r^2 \sin\theta\,d\theta\,dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^2 \left[-\cos\theta\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\pi} = \frac{7}{6}(2+\sqrt{2}).$$

Esercizio 7. Per stabilire l'esistenza dell'integrale improprio proposto, dobbiamo studiare il comportamento della funzione integranda in un intorno di 1^+ ed in un intorno di $+\infty$. Otteniamo

$$U(1^+) \quad f(x) \sim (x-1)^\alpha \log[1+(x-1)] \sim \frac{1}{(x-1)^{-\alpha-1}} \quad \Longrightarrow \text{l'integrale esiste finito se } \alpha > -2$$

$$U(+\infty) \quad f(x) \sim \frac{x^\alpha \log x}{\log^2 x} \sim \frac{1}{x^{-\alpha}\log x} \quad \Longrightarrow \text{l'integrale esiste finito se } \alpha < -1.$$

Pertanto, l'integrale improprio proposto esiste per $-2 < \alpha < -1$.

Domanda 1. Si ha

$$f(x+T) = \cos(x+T) + \sin(4x+4T) = f(x) = \cos(x) + \sin(4x) \quad \forall\, x \in I\!R$$

se e solo se

$$\begin{cases} T = 2h\pi \\ 4T = 2k\pi \end{cases} \quad \text{per qualche } h, k \in \mathbf{Z},$$

che è verificata per $k = 4h$; pertanto ($h = 1$, $k = 4$) $T = 2\pi$.

Domanda 2. No. Infatti

$$\lim_{x\to 1} f(x) = +\infty \qquad \text{mentre} \quad f(1) = 1.$$

Domanda 3. È sufficiente osservare che

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 0 \neq \lim_{x\to 0} f(x,0) = -3.$$

SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1. Passando in coordinate polari, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3-3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0^+} \frac{(r\sin\theta)^3 - 3(r\cos\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0^+} r[(\sin\theta)^3 - 3(\cos\theta)^3] = 0$$

indipendentemente da θ.

Esercizio 2. Si ha

$$\nabla f(x,y) = \left(1 + \frac{y}{xy+1}, \frac{x}{xy+1}\right),$$

e quindi $\nabla f(1,0) = (1,1)$.

Esercizio 3. L'equazione è a variabili separabili, quindi l'integrale generale è dato dalla soluzione costante $y \equiv 0$ e da

$$-\int \frac{dy}{y} = \log n \int dt \quad \Longrightarrow \quad y(t) = C\mathrm{e}^{(\log n)\, t}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

La condizione iniziale implica $C = 1$, e quindi

$$y_n(t) = \mathrm{e}^{(\log n) t} = n^t,\ t \in \mathbb{R}; \qquad \lim_{n\to\infty} y_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

Esercizio 4. Passando in coordinate polari si ottiene

$$\iint_D x\, dx\, dy = \int_1^3 \int_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} r^2 \cos\theta\, d\theta\, dr = \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^3 \left[\sin\theta\right]_{\frac{1}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} = -\frac{26}{3}\sqrt{2}.$$

Domanda 1. È sufficiente osservare che

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = 1 \neq \lim_{x\to 0} f(x,0) = -1.$$