SOLUZIONI COMPITO del 11/01/2017
ANALISI MATEMATICA I - 9 CFU
MECCANICA

TEMA A

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$z^4 = -\frac{25}{16} \qquad \text{da cui} \qquad z = \sqrt[4]{\frac{25}{16}\mathrm{e}^{i\pi}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i\pi/4}; \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i3\pi/4}; \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i5\pi/4}; \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i7\pi/4}; \end{cases}$$

dove abbiamo applicato la formula di calcolo delle radici quarte. Pertanto

$$w_0 = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i\pi/4}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i\pi/2} = \sqrt{5}i/2, \qquad w_1 = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i3\pi/4}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i\pi} = -\sqrt{5}/2,$$
$$w_2 = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i5\pi/4}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -\sqrt{5}i/2, \qquad w_3 = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i7\pi/4}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i2\pi} = \sqrt{5}/2.$$

Esercizio 2

Applicando le proprietà dei logaritmi, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3\log(1+2n) - 2\log[(2n)^\alpha]}{\log n - \log(n+2)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3\log(2n) + 3\log\left(1+\frac{1}{2n}\right) - 2\alpha\log(2n)}{-\log\left(\frac{n+2}{n}\right)} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{(3-2\alpha)\log(2n) + 3\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)}{\log\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{(3-2\alpha)\log(2n) + 3/(2n)}{2/n} = \begin{cases} -\infty & \text{se } 0<\alpha<3/2, \\ -3/4 & \text{se } \alpha = 3/2, \\ +\infty & \text{se } \alpha > 3/2, \end{cases}$$

dove, nella terza uguaglianza, abbiamo utilizzato il fatto che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = 1/(2n)$ e $\varepsilon_n = 2/n$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Per il teorema di esistenza e unicità in grande, esiste un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$. Tenendo conto che

$$\int -\frac{1+3x^2}{x+x^3}\,dx = -\log(x+x^3) + C\,,$$
$$\int \mathrm{e}^{-\log(x+x^3)} 2x\arctan x\,dx = 2\int \frac{x}{x+x^3}\arctan x\,dx = 2\int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx = (\arctan x)^2 + C\,,$$

dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log(x+x^3)} + \mathrm{e}^{\log(x+x^3)}(\arctan x)^2 = (x+x^3)[C + (\arctan x)^2]\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$\frac{\pi^2}{8} + 1 = y(1) = 2[C + (\arctan 1)^2] = 2C + 2\,\frac{\pi^2}{16} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1/2\,.$$

ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = (x+x^3)[1/2 + (\arctan x)^2]$.

Esercizio 4
Ricordando che

$$\log(1+2x^2) = 2x^2 - \frac{(2x^2)^2}{2} + \frac{(2x^2)^3}{3} - \frac{(2x^2)^4}{4} + o(x^8)\,,$$
$$\sin(x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^3}{3!} + o(x^8)\,,$$

otteniamo

$$f(x) = \frac{2x^2 - 2x^4 + 8x^6/3 - 4x^8 - 2x^2 + x^6/3 + 2x^4 - 3x^6 + o(x^8)}{x^3} = \frac{-4x^8 + o(x^8)}{x^3} \sim -4x^5\,.$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo cercato è 5.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto \mathrm{e}^{x^2}$ è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, utilizzando il teorema di derivazione delle funzione composta ed il teorema di Torricelli, possiamo derivare due volte F ottenendo

$$F'(x) = f^2(\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{e}^{x^2}2x\,, \qquad F''(x) = 2f(\mathrm{e}^{x^2})f'(\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{e}^{2x^2}4x^2 + f^2(\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{e}^{x^2}4x^2 + f^2(\mathrm{e}^{x^2})\mathrm{e}^{x^2}2\,.$$

Osserviamo che, per le ipotesi fatte, f ha un minimo assoluto nell'origine, dove assume un valore strettamente positivo, quindi $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre $f'(x) \geq 0$ per $(0, +\infty)$. Pertanto, si ricava che $F''(x) \geq 0$, in quanto somma di quantità non negative, e quindi F è convessa in $\mathbb{R}$.

TEMA B

Esercizio 1
Osserviamo che l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$z^4 = \frac{16}{25} i \qquad \text{da cui} \qquad z = \sqrt[4]{\frac{16}{25} e^{i\pi/2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i\pi/8}; \\ \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i5\pi/8}; \\ \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i9\pi/8}; \\ \frac{2}{\sqrt{5}} e^{i13\pi/8}; \end{cases}$$

dove abbiamo applicato la formula di calcolo delle radici quarte. Pertanto

$$\begin{aligned} w_0 &= (2/\sqrt{5}) e^{i\pi/8} e^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5}) e^{i\pi/4} = (2/\sqrt{5})(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}), \\ w_1 &= (2/\sqrt{5}) e^{i5\pi/8} e^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5}) e^{i3\pi/4} = (2/\sqrt{5})(-1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}), \\ w_2 &= (2/\sqrt{5}) e^{i9\pi/8} e^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5}) e^{i5\pi/4} = (2/\sqrt{5})(-1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}), \\ w_3 &= (2/\sqrt{5}) e^{i13\pi/8} e^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5}) e^{i7\pi/4} = (2/\sqrt{5})(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Esercizio 2
Applicando le proprietà dei logaritmi, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(2n+3) - \log(2n)}{3\log[(4n)^\alpha] - 2\log(1+4n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(\frac{2n+3}{2n}\right)}{3\alpha\log(4n) - 2\log(4n) - 2\log\left(1+\frac{1}{4n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{3}{2n}\right)}{(3\alpha-2)\log(4n) - 2\log\left(1+\frac{1}{4n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3/(2n)}{(3\alpha-2)\log(4n) - 1/(2n)} = \begin{cases} 0^- & \text{se } 0 < \alpha < 2/3, \\ -3 & \text{se } \alpha = 2/3, \\ 0^+ & \text{se } \alpha > 2/3, \end{cases}$$

dove, nella terza uguaglianza, abbiamo utilizzato il fatto che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = 3/(2n)$ e $\varepsilon_n = 1/(4n)$.

Esercizio 3
Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Per il teorema di esistenza e unicità in grande, esiste un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(0, +\infty)$. Tenendo conto che

$$\begin{aligned} &\int -\frac{2+9x^2}{2x+3x^3}\, dx = -\log(2x+3x^3) + C\,, \\ &\int e^{-\log(2x+3x^3)} 12x^2 \log(2+3x^2)\, dx = 12 \int \frac{x^2}{2x+3x^3} \log(2+3x^2)\, dx \\ &\qquad = \int \frac{12x}{2+3x^2} \log(2+3x^2)\, dx = [\log(2+3x^2)]^2 + C\,, \end{aligned}$$

dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = C e^{\log(2x+3x^3)} + e^{\log(2x+3x^3)} [\log(2+3x^2)]^2 = (2x+3x^3)[C + [\log(2+3x^2)]^2]\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$10 + 5(\log 5)^2 = y(1) = 5[C + (\log 5)^2] = 5C + 5(\log 5)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 2\,.$$

ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = (2x+3x^3)[2 + [\log(2+3x^2)]^2]$.

Esercizio 4
Ricordando che

$$\cos\sqrt{6x} = 1 - \frac{(\sqrt{6x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{6x})^4}{4!} - \frac{(\sqrt{6x})^6}{6!} + o(x^3)\,,$$
$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)\,,$$

otteniamo

$$f(x) = \frac{x^5}{1 - 3x + 3x^2/2 - 3x^3/10 + 1 + 3x + 9x^2/2 + 9x^3/2 - 2 - 6x^2 + o(x^3)} = \frac{x^5}{21x^3/5 + o(x^3)} \sim \frac{5x^2}{21}\,.$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo cercato è 2.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto e^{x^4}$ è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, utilizzando il teorema di derivazione delle funzione composta ed il teorema di Torricelli, possiamo derivare due volte F ottenendo

$$F'(x) = f^3(e^{x^4})e^{x^4}4x^3\,, \qquad F''(x) = 3f^2(e^{x^4})f'(e^{x^4})e^{2x^4}16x^6 + f^3(e^{x^4})e^{x^4}16x^6 + f^3(e^{x^4})e^{x^4}12x^2\,.$$

Osserviamo che, per le ipotesi fatte, f ha un massimo assoluto nell'origine, dove assume un valore strettamente negativo, quindi $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre $f'(x) \leq 0$ per $(0, +\infty)$. Pertanto, si ricava che $F''(x) \leq 0$, in quanto somma di quantità non positive, e quindi F è concava in $\mathbb{R}$.

TEMA C

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$z^4 = -\frac{16}{25}i \qquad \text{da cui} \qquad z = \sqrt[4]{\frac{16}{25}\mathrm{e}^{-i\pi/2}} = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{-i\pi/8}; \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{i3\pi/8}; \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{i7\pi/8}; \\ \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{e}^{i11\pi/8}; \end{cases}$$

dove abbiamo applicato la formula di calcolo delle radici quarte. Pertanto

$$w_0 = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{-i\pi/8}\mathrm{e}^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{i0} = 2/\sqrt{5}, \qquad w_1 = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{i3\pi/8}\mathrm{e}^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{i\pi/2} = 2i/\sqrt{5},$$
$$w_2 = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{i7\pi/8}\mathrm{e}^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{i\pi} = -2/\sqrt{5}, \qquad w_3 = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{i11\pi/8}\mathrm{e}^{i\pi/8} = (2/\sqrt{5})\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -2i/\sqrt{5}.$$

Esercizio 2

Applicando le proprietà dei logaritmi, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(5n) - \log(5n+2)}{4\log[(3n)^\alpha] - 3\log(1+3n)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-\log\left(\frac{5n+2}{5n}\right)}{4\alpha\log(3n) - 3\log(3n) - 3\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{\log\left(1+\frac{2}{5n}\right)}{(4\alpha-3)\log(3n) - 3\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{2/(5n)}{(4\alpha-3)\log(3n) - 1/n} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } 0<\alpha<3/4, \\ 2/5 & \text{se } \alpha = 3/4, \\ 0^- & \text{se } \alpha > 3/4, \end{cases}$$

dove, nella terza uguaglianza, abbiamo utilizzato il fatto che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = 2/(5n)$ e $\varepsilon_n = 1/(3n)$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Per il teorema di esistenza e unicità in grande, esiste un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$. Tenendo conto che

$$\int -\frac{3+6x^2}{3x+2x^3}\,dx = -\log(3x+2x^3) + C\,,$$
$$\int \mathrm{e}^{-\log(3x+2x^3)} 8x^2 \log(3+2x^2)\,dx = 8\int \frac{x^2}{3x+2x^3}\log(3+2x^2)\,dx$$
$$= \int \frac{8x}{3+2x^2}\log(3+2x^2)\,dx = [\log(3+2x^2)]^2 + C\,,$$

dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log(3x+2x^3)} + \mathrm{e}^{\log(3x+2x^3)}[\log(3+2x^2)]^2 = (3x+2x^3)[C + [\log(3+2x^2)]^2]\,.$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$5 + 5(\log 5)^2 = y(1) = 5[C + (\log 5)^2] = 5C + 5(\log 5)^2 \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1\,.$$

ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = (3x+2x^3)[1 + [\log(3+2x^2)]^2]$.

Esercizio 4

Ricordando che

$$\cos\sqrt{4x} = 1 - \frac{(\sqrt{4x})^2}{2} + \frac{(\sqrt{4x})^4}{4!} - \frac{(\sqrt{4x})^6}{6!} + o(x^3)\,,$$
$$e^{3x} = 1 + 3x + \frac{(3x)^2}{2} + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^3)\,,$$

otteniamo

$$f(x) = \frac{x^5}{3 - 6x + 2x^2 - 4x^3/15 + 2 + 6x + 9x^2 + 9x^3 - 5 - 11x^2 + o(x^3)} = \frac{x^5}{131x^3/15 + o(x^3)} \sim \frac{15x^2}{131}\,.$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo cercato è 2.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto e^{x^4}$ è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, utilizzando il teorema di derivazione delle funzione composta ed il teorema di Torricelli, possiamo derivare due volte F ottenendo

$$F'(x) = f^3(e^{x^4})e^{x^4}4x^3\,, \qquad F''(x) = 3f^2(e^{x^4})f'(e^{x^4})e^{2x^4}16x^6 + f^3(e^{x^4})e^{x^4}16x^6 + f^3(e^{x^4})e^{x^4}12x^2\,.$$

Osserviamo che, per le ipotesi fatte, f ha un massimo assoluto nell'origine, dove assume un valore strettamente negativo, quindi $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre $f'(x) \le 0$ per $(0, +\infty)$. Pertanto, si ricava che $F''(x) \le 0$, in quanto somma di quantità non positive, e quindi F è concava in $\mathbb{R}$.

TEMA D

Esercizio 1

Osserviamo che l'equazione proposta si riscrive nella forma

$$z^4 = \frac{25}{16} \qquad \text{da cui} \qquad z = \sqrt[4]{\frac{25}{16}\mathrm{e}^{i0}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i0} = \frac{\sqrt{5}}{2}; \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i\pi/2} = \frac{\sqrt{5}}{2}i; \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i\pi} = -\frac{\sqrt{5}}{2}; \\ \frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{e}^{i3\pi/2} = -\frac{\sqrt{5}}{2}i; \end{cases}$$

dove abbiamo applicato la formula di calcolo delle radici quarte. Pertanto

$$\begin{aligned} w_0 &= (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i0}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}), \\ w_1 &= (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i\pi/2}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i3\pi/4} = (\sqrt{5}/2)(-1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}), \\ w_2 &= (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i\pi}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i5\pi/4} = (\sqrt{5}/2)(-1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}), \\ w_3 &= (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i3\pi/2}\mathrm{e}^{i\pi/4} = (\sqrt{5}/2)\mathrm{e}^{i7\pi/4} = (\sqrt{5}/2)(1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}). \end{aligned}$$

Esercizio 2

Applicando le proprietà dei logaritmi, si ricava

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\log(1+3n) - 3\log[(3n)^\alpha]}{\log(n+4) - \log n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\log(3n) + 2\log\left(1+\frac{1}{3n}\right) - 3\alpha\log(3n)}{\log\left(\frac{n+4}{n}\right)} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2-3\alpha)\log(3n) + 2\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)}{\log\left(1+\frac{4}{n}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2-3\alpha)\log(3n) + 2/(3n)}{4/n} = \begin{cases} +\infty & \text{se } 0 < \alpha < 2/3, \\ 1/6 & \text{se } \alpha = 2/3, \\ -\infty & \text{se } \alpha > 2/3, \end{cases}$$

dove, nella terza uguaglianza, abbiamo utilizzato il fatto che $\log(1+\varepsilon_n) \sim \varepsilon_n$, con $\varepsilon_n = 1/(3n)$ e $\varepsilon_n = 4/n$.

Esercizio 3

Il problema di Cauchy proposto è relativo ad un'equazione differenziale lineare del primo ordine non omogenea. Per il teorema di esistenza e unicità in grande, esiste un'unica soluzione $y \in \mathcal{C}^1(0,+\infty)$. Tenendo conto che

$$\int -\frac{2x+4x^3}{x^2+x^4}\,dx = -\log(x^2+x^4) + C\,,$$

$$\int \mathrm{e}^{-\log(x^2+x^4)}x^2\arctan x\,dx = \int \frac{x^2}{x^2+x^4}\arctan x\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,dx = \frac{(\arctan x)^2}{2} + C\,,$$

dalla formula risolutiva otteniamo

$$y(x) = C\mathrm{e}^{\log(x^2+x^4)} + \mathrm{e}^{\log(x^2+x^4)}\frac{(\arctan x)^2}{2} = (x^2+x^4)\left[C + \frac{(\arctan x)^2}{2}\right].$$

Imponendo la condizione iniziale si ricava

$$\frac{\pi^2}{16} + 1 = y(1) = 2\left[C + \frac{(\arctan 1)^2}{2}\right] = 2C + \frac{\pi^2}{16} \qquad \Longrightarrow \qquad C = 1/2\,.$$

ovvero la soluzione cercata sarà $y(x) = (x^2+x^4)\left[\frac{1+(\arctan x)^2}{2}\right]$.

Esercizio 4
Ricordando che

$$\log(1+x^2) = x^2 - \frac{(x^2)^2}{2} + \frac{(x^2)^3}{3} - \frac{(x^2)^4}{4} + o(x^8)\,,$$
$$\sin(3x^2) = 3x^2 - \frac{(3x^2)^3}{3!} + o(x^8)\,,$$

otteniamo

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3x^4/2 + x^6 - 3x^8/4 - 3x^2 + 9x^6/2 + 3x^4/2 - 11x^6/2 + o(x^8)}{x^3} = \frac{-3x^8/4 + o(x^8)}{x^3} \sim -\frac{3x^5}{4}\,.$$

Pertanto, l'ordine di infinitesimo cercato è 5.

Esercizio 5

i) Per l'enunciato e la dimostrazione si veda il libro di testo.

ii) Poiché $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ e la funzione $x \mapsto e^{x^2}$ è di classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, utilizzando il teorema di derivazione delle funzione composta ed il teorema di Torricelli, possiamo derivare due volte F ottenendo

$$F'(x) = f^2(e^{x^2})e^{x^2}2x\,, \qquad F''(x) = 2f(e^{x^2})f'(e^{x^2})e^{2x^2}4x^2 + f^2(e^{x^2})e^{x^2}4x^2 + f^2(e^{x^2})e^{x^2}2\,.$$

Osserviamo che, per le ipotesi fatte, f ha un minimo assoluto nell'origine, dove assume un valore strettamente positivo, quindi $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$; inoltre $f'(x) \geq 0$ per $(0, +\infty)$. Pertanto, si ricava che $F''(x) \geq 0$, in quanto somma di quantità non negative, e quindi F è convessa in $\mathbb{R}$.