11 APRILE 2003 — SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1.

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = I\!R$. Inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -7x = +\infty \qquad \text{e } \ y=-7x \ \text{ è asinototo obliquo per } x\to-\infty\ ;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x\log x}{\log x} = +\infty \qquad \text{e non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x\to+\infty\ ,$$

$$\text{infatti} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty}[f(x)-2x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9x}{\log x} = -\infty\ .$$

- Poiché

$$\lim_{x\to 1/\mathrm{e}^-} f(x) = -7/\mathrm{e} = f(1/\mathrm{e}) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1/\mathrm{e}^+} f(x) = -7/\mathrm{e}$$

si ottiene che $f\in\mathcal{C}^0(I\!R)$.

Monotonia:

$$f'(x) = \begin{cases} -7 & \text{per } x<1/\mathrm{e}\ ; \\[2ex] \dfrac{2\log^2 x - \log x - 1}{(\log x+2)^2} & \text{per } x>1/\mathrm{e}\ ; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1/\mathrm{e}^-} f'(x) = -7 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 1/\mathrm{e}^+} f'(x) = 2\ ;$$

$$f'(x)>0 \quad \text{per } 1/\mathrm{e}<x<1/\sqrt{\mathrm{e}}\ ,\ x>\mathrm{e}\ ; \qquad f'(x)<0 \quad \text{per } x<1/\mathrm{e}\ ,\ 1/\sqrt{\mathrm{e}}<x<\mathrm{e}\ .$$

Pertanto, $x=1/\mathrm{e}$ è punto angoloso, $x=\mathrm{e}$, $1/\mathrm{e}$ sono punti di minimo relativo, mentre $x=1/\sqrt{\mathrm{e}}$ è punto di massimo relativo, con $f(1/\sqrt{\mathrm{e}}) = -\frac{8}{3\sqrt{\mathrm{e}}}$. Poiché $f(1/\mathrm{e}) = -7/\mathrm{e} > -\mathrm{e} = f(\mathrm{e})$, $x=\mathrm{e}$ è punto di minimo assoluto.

Concavità:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x<1/\mathrm{e}\ ; \\[2ex] \dfrac{9\log x}{x(\log x+2)^3} & \text{per } x>1/\mathrm{e}\ ; \end{cases} \qquad f''(x)=0 \ \text{ per } x<1/\mathrm{e}\ ,\ x=1\ ;$$

$$f''(x)<0 \quad \text{per } \ 1/\mathrm{e}<x<1\ , \quad f \text{ è concava}\ ; \qquad f''(x)>0 \quad \text{per } \ x>1\ , \quad f \text{ è convessa}\ ;$$
$$x=1 \text{ è punto di flesso}\ .$$

Il grafico è

Esercizio 2.

- Per $\alpha = 0$ abbiamo
$$\int_0^1 f_0(x)\ dx = \int_0^1 \frac{x^2}{3+x^2}\ dx = \int_0^1 \frac{x^2+3-3}{3+x^2}\ dx = \int_0^1\ dx - 3\int_0^1 \frac{1}{3[1+(x/\sqrt{3})^2]}\ dx$$
$$= x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+(x/\sqrt{3})^2}\ dx = 1 - \sqrt{3}\arctan(x/\sqrt{3})\Big|_0^1 = 1 - \sqrt{3}\frac{\pi}{6}\ .$$
- Osserviamo che, per $\alpha > 0$, si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^{-2\alpha}} = +\infty\ ,$$
pertanto la funzione non è integrabile in senso improprio ed essendo sempre non negativa nell'intervallo $(0, +\infty)$, l'integrale proposto risulta essere positivamente divergente.

Esercizio 3.

Poiché possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma
$$y'(x) = \frac{1}{2x}y^2(x)\ ,$$
essa risulta essere a variabili separabili ed ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che, però, non soddisfa la condizione iniziale. Le altre soluzioni si ottengono tramite il metodo della separazione delle variabili, che fornisce
$$y(x) = -\frac{1}{\log\sqrt{|x|} + C} \qquad C \in \mathbb{R}\ .$$
Imponendo la condizione iniziale, si ricava che la soluzione cercata è $y(x) = \dfrac{3}{1 - 3\log\sqrt{x}}$ definita per $x > 0$.

Esercizio 4.

In quanto composizione di funzioni continue, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$. Resta da studiare il comportamento della funzione nell'origine:
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to0^+}\frac{\sin(\rho\cos\theta)^3}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^3\cos^3\theta}{\rho^{2\alpha}} = \lim_{\rho\to0^+}\rho^{3-2\alpha}\cos^3\theta = 0$$
$$\iff \qquad 3 - 2\alpha > 0 \qquad \iff \qquad \alpha < 3/2\ .$$

Domanda 1.

- Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Essa si dice monotona crescente in senso stretto (monotona non decrescente o crescente in senso lato) se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n < a_{n+1}$ (rispettivamente $a_n \le a_{n+1}$).
- Un esempio di successione crescente superiormente limitata è dato da $a_n = 1 - 1/n$ che è ovviamente monotona crescente ed è anche superiormente limitata, in quanto è sempre strettamente più piccola del valore 1.
  Un esempio di successione crescente superiormente illimitata è dato da $a_n = n$ che è ovviamente monotona crescente ed è anche superiormente illimitata in quanto diverge a $+\infty$.

Domanda 2.

- Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, essa si dice parzialmente derivabile rispetto ad y nel punto $(3,5)$, se esiste finito il seguente limite
$$\lim_{t\to0}\frac{f(3,5+t) - f(3,5)}{t}\ .$$
- Data
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\ , \end{cases}$$
si osserva subito che in $(0,0)$ la funzione ammette entrambe le derivate parziali nulle, ma essa non è continua, poiché, restringendo la funzione alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si ottiene
$$\lim_{x\to0} f(x,x) = \lim_{x\to0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0\ .$$

11 APRILE 2003 — SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1.

- La funzione proposta è definita su tutto l'asse reale, pertanto $C.E. = I\!R$. Inoltre,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 7x = -\infty \qquad \text{e} \;\; y = 7x \;\; \text{è asinototo obliquo per } x \to -\infty \;;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{2x\log x}{\log x} = -\infty \qquad \text{e non ci sono asinototi orizzontali o obliqui per } x \to +\infty \;,$$

$$\text{infatti} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{9x}{\log x} = +\infty \;.$$

- Poiché

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = 7 = f(1) \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^+} f(x) = 7$$

si ottiene che $f \in \mathcal{C}^0(I\!R)$.
Monotonia:

$$f'(x) = \begin{cases} 7 & \text{per } x < 1 \;; \\ \dfrac{-2\log^2 x + 5\log x - 2}{(\log x + 1)^2} & \text{per } x > 1 \;; \end{cases}$$

$$\lim_{x\to1^-} f'(x) = 7 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to1^+} f'(x) = -2 \;;$$

$$f'(x) > 0 \quad \text{per } x < 1 \;,\; \sqrt{\mathrm{e}} < x < \mathrm{e}^2 \;; \qquad f'(x) < 0 \quad \text{per } 1 < x < \sqrt{\mathrm{e}} \;,\; x > \mathrm{e}^2 \;.$$

Pertanto, $x = 1$ è punto angoloso, $x = \mathrm{e}^2,\ 1$ sono punti di massimo relativo, mentre $x = \sqrt{\mathrm{e}}$ è punto di minimo relativo, con $f(\sqrt{\mathrm{e}}) = 4\sqrt{\mathrm{e}}$. Poiché $f(1) = 7 < \mathrm{e}^2 = f(\mathrm{e}^2)$, $x = \mathrm{e}^2$ è punto di massimo assoluto.
Concavità:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 1 \;; \\ \dfrac{9(1 - \log x)}{x(\log x + 1)^3} & \text{per } x > 1 \;; \end{cases} \qquad f''(x) = 0 \;\; \text{per } x < 1 \;,\; x = \mathrm{e} \;;$$

$$f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad x > \mathrm{e} \;, \quad f \text{ è concava} \;; \qquad f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad 1 < x < \mathrm{e} \;, \quad f \text{ è convessa} \;;$$

$x = \mathrm{e}$ è punto di flesso .

Il grafico è

Esercizio 2.

- Per $\alpha = 0$ abbiamo

$$\int_0^1 f_0(x)\ dx = \int_0^1 \frac{2x}{1+2x}\ dx = \int_0^1 \frac{2x+1-1}{1+2x}\ dx = \int_0^1\ dx - \int_0^1 \frac{1}{1+2x}\ dx$$
$$= x\Big|_0^1 - \frac{1}{2}\log|1+2x|\Big|_0^1 = 1 - \log\sqrt{3}\ .$$

- Osserviamo che, per $\alpha < 0$, si ha

$$\lim_{x\to+\infty} f_\alpha(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-2\alpha} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{2\alpha}} = +\infty\ ,$$

pertanto la funzione non è integrabile in senso improprio ed essendo sempre non negativa nell'intervallo $(0, +\infty)$, l'integrale proposto risulta essere positivamente divergente.

Esercizio 3.

Poiché possiamo riscrivere l'equazione proposta nella forma

$$y'(x) = x^{-2}y^2(x)\ ,$$

essa risulta essere a variabili separabili ed ha come unica soluzione singolare la funzione $y(x) \equiv 0$, che, però, non soddisfa la condizione iniziale. Le altre soluzioni si ottengono tramite il metodo della separazione delle variabili, che fornisce

$$y(x) = -\frac{x}{Cx-1} \qquad C \in \mathbb{R}\ .$$

Imponendo la condizione iniziale, si ricava che la soluzione cercata è $y(x) = x$ definita per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 4.

In quanto composizione di funzioni continue, $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0))$. Resta da studiare il comportamento della funzione nell'origine:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\log[1+(\rho\cos\theta)^2]}{\rho^{6\alpha}} = \lim_{\rho\to0^+} \frac{\rho^2\cos^2\theta}{\rho^{6\alpha}} = \lim_{\rho\to0^+} \rho^{2-6\alpha}\cos^2\theta = 0$$
$$\iff \qquad 2-6\alpha > 0 \qquad \iff \qquad \alpha < 1/3\ .$$

Domanda 1.

- Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. Essa si dice monotona decrescente in senso stretto (monotona non crescente o decrescente in senso lato) se per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n > a_{n+1}$ (rispettivamente $a_n \geq a_{n+1}$).
- Un esempio di successione decrescente inferiormente limitata è dato da $a_n = 1/n$ che è ovviamente monotona decrescente ed è anche inferiormente limitata, in quanto è sempre strettamente più grande del valore 0.

  Un esempio di successione decrescente inferiormente illimitata è dato da $a_n = -n$ che è ovviamente monotona decrescente ed è anche inferiormente illimitata in quanto diverge a $-\infty$.

Domanda 2.

- Data $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, essa si dice parzialmente derivabile rispetto ad x nel punto $(9,3)$, se esiste finito il seguente limite

$$\lim_{t\to0} \frac{f(9+t,3) - f(9,3)}{t}\ .$$

- Data

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0)\ , \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0)\ , \end{cases}$$

si osserva subito che in $(0,0)$ la funzione ammette entrambe le derivate parziali nulle, ma essa non è continua, poiché, restringendo la funzione alla bisettrice del primo e terzo quadrante, si ottiene

$$\lim_{x\to0} f(x,x) = \lim_{x\to0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2} \neq 0\ .$$