CALCOLO DIFF. e INT./A appello del 11 aprile 2005	cognome e nome firma

1. Si consideri, al variare del parametro reale α , la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 \log n}{3^{5\alpha n}} .$$

1. Stabilire se per $\alpha = 1$ la serie proposta converge.
2. Studiare il carattere della serie proposta per tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) + \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x} y(x) = \dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x} , \\ \\ y(0) = 2 , \end{cases} \qquad x \in (-\pi/2, \pi/2) .$$

1. Determinare la soluzione $y(x)$ del precedente problema.
2. Calcolare
$$\lim_{x \to \pi/2^-} y(x) .$$

---

3. Si consideri la funzione $f(x,y) = (y - 1 + x/2)(x^2 + 1)$ definita sull'insieme chiuso

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0, \ y \geq 0, \ y \leq 1 - x\} .$$

1. Determinare eventuali estremanti relativi e assoluti di f all'**interno** dell'insieme T .
2. Determinare gli estremanti assoluti di f su tutto l'insieme chiuso T , giustificando la risposta.

---

4. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\log(1+x)}{1+x^2} + \frac{x^2}{x-3} .$$

1. Determinare il campo di esistenza A della funzione f .
2. Calcolare eventuali asintoti di f .

---

5. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n + 1} (x - 1/2)^n .$$

---

6. Fornire un esempio (anche solo grafico) di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che abbia un punto di salto in $x = 1$ ed una cuspide in $x = 10$.

Tempo:
3 ore

CALCOLO DIFF. e INT./B appello del 11 aprile 2005	cognome e nome firma

1. Si consideri, al variare del parametro reale α , la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n\log^2 n}{4^{2\alpha n}} .$$

1. Stabilire se per $\alpha = 2$ la serie proposta converge.
2. Studiare il carattere della serie proposta per tutti i valori $\alpha \in \mathbb{R}$.

---

2. Si consideri il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) - \dfrac{\log^2 x}{x} y(x) = \dfrac{\log^2 x}{x} , \\ \\ y(1) = 2 , \end{cases} \qquad x \in (0, +\infty) .$$

1. Determinare la soluzione $y(x)$ del precedente problema.
2. Calcolare
$$\lim_{x\to 0^+} y(x) .$$

---

3. Si consideri la funzione $f(x,y) = (x - 1 + y/2)(y^2 + 1)$ definita sull'insieme chiuso

$$T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0,\ y \geq 0,\ y \leq 1 - x\} .$$

1. Determinare eventuali estremanti relativi e assoluti di f all'**interno** dell'insieme T .
2. Determinare gli estremanti assoluti di f su tutto l'insieme chiuso T , giustificando la risposta.

---

4. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{\log(1-3x)}{2+5x^2} + \frac{2x^2}{x+3} .$$

1. Determinare il campo di esistenza A della funzione f .
2. Calcolare eventuali asintoti di f .

---

5. Determinare il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n + 2}(x + 1/4)^n .$$

---

6. Fornire un esempio (anche solo grafico) di una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ che abbia un punto di salto in $x = 0$ ed un angolo in $x = 5$.

Tempo: 3 ore