SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

La funzione proposta è continua su tutto $\mathbb{R}$ e non negativa in $(0, +\infty)$; pertanto, per stabilire se l'integrale improprio esiste finito, si deve solo studiare il comportamento di f a $+\infty$. A tale proposito, osserviamo che

$$\text{per } \; x \to +\infty \qquad f(x) = \frac{5x}{1+x^4} \sim \frac{5}{x^3}\,,$$

e, poiché $1/x^3$ è impropriamente integrabile in un intorno di $+\infty$, per il criterio del confronto asintotico, si ottiene che l'integrale proposto esiste finito.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine sia lineare che a variabili separabili, pertanto può essere risolta in entrambi i modi. Noi procederemo tramite la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, che fornisce:

$$\begin{aligned} y(x) &= C \exp\left(-\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\, dx\right) + \exp\left(-\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\, dx\right) \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\, \exp\left(\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\right) dx \\ &= C \exp\left(-\frac{\tan^3 x}{3}\right) + 1\,. \end{aligned}$$

   Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 2$, si ottiene $C = 1$ e quindi la soluzione sarà

$$y(x) = \exp\left(-\frac{\tan^3 x}{3}\right) + 1\,.$$

2. Tenendo conto del punto precedente, si ottiene

$$\lim_{x\to\pi/2^-} y(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} \left[\exp\left(-\frac{\tan^3 x}{3}\right) + 1\right] = 1\,.$$

Esercizio 3

1. All'interno dell'insieme T, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+1) + 2x(y-1+x/2) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2+1 = 0\,. \end{cases}$$

   Poiché il sistema precedente non ammette soluzioni, non ci sono punti estremanti all'interno di T.
2. Poiché f è continua e l'insieme T è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in T. Poiché all'interno di T, come visto nel punto precedente, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di T.

   • lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = y - 1 =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = 1 > 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $y \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato a, mentre $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a.

   • lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = (x/2-1)(x^2+1) =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 4x + 1)\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $x \in [0, 1/3)$ ed è decrescente quando $x \in (1/3, 1]$. Pertanto $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono punti di minimo per f vincolati al lato b, mentre $(1/3, 0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b.

- lato $c := \{y = 1 - x,\ x \in [0, 1]\}$:

$$f(x, 1-x) = -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^2 < 0\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $x \in [0, 1]$. Pertanto $(0, 1)$ è punto di massimo per f vincolato al lato c, mentre $(1, 0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato c.

Poiché

$$\begin{matrix} f(0,0) = -1 & & f(0,1) = 0 \\ & \text{e} & \\ f(1,0) = -1 & & f(1/3,0) = -5/6 \cdot 10/9 < 0 \end{matrix}$$

si ricava subito che $(0, 0)$ e $(1, 0)$ sono punti di minimo assoluto per f su T, mentre $(0, 1)$ è punto di massimo assoluto per f su T.

Esercizio 4

Poiché

$$l := \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 1}} = \frac{1}{3}\,,$$

si ottiene subito che il raggio di convergenza della serie proposta è $R = 3$.