SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

Osserviamo innanzitutto che la serie proposta è a termini positivi.

1. Per $\alpha = 1$, essa si riscrive nella forma
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n^2 \log n}{3^{5n}} \,,$$
ed utilizzando il criterio della radice si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2 \log n}{3^{5n}}} = \frac{1}{3^5} < 1 \,,$$
pertanto la serie converge.

2. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sempre utilizzando il criterio della radice, si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2 \log n}{3^{5\alpha n}}} = \frac{1}{3^{5\alpha}} \,,$$
quindi la serie converge se $1/3^{5\alpha} < 1$, cioè $\alpha > 0$, e diverge se $1/3^{5\alpha} > 1$, cioè $\alpha < 0$. Per $\alpha = 0$ il criterio non fornisce alcuna informazione, pertanto bisogna procedere per altra via. Sostituendo $\alpha = 0$ nella serie proposta, si osserva subito che il termine generale $a_n = 3n^2 \log n$ non è infinitesimo, pertanto la serie diverge.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine sia lineare che a variabili separabili, pertanto può essere risolta in entrambi i modi. Noi procederemo tramite la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, che fornisce:
$$\begin{aligned} y(x) &= C \exp\left(-\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\, dx\right) + \exp\left(-\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\, dx\right) \int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x} \exp\left(\int \frac{\tan^2 x}{\cos^2 x}\right) dx \\ &= C \exp\left(-\frac{\tan^3 x}{3}\right) + 1 \,. \end{aligned}$$
Imponendo la condizione iniziale $y(0) = 2$, si ottiene $C = 1$ e quindi la soluzione sarà
$$y(x) = \exp\left(-\frac{\tan^3 x}{3}\right) + 1 \,.$$

2. Tenendo conto del punto precedente, si ottiene
$$\lim_{x\to\pi/2^-} y(x) = \lim_{x\to\pi/2^-} \left[\exp\left(-\frac{\tan^3 x}{3}\right) + 1\right] = 1 \,.$$

Esercizio 3

1. All'interno dell'insieme T, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:
$$\begin{cases} f_x(x,y) = \dfrac{1}{2}(x^2+1) + 2x(y - 1 + x/2) = 0 \\ f_y(x,y) = x^2 + 1 = 0 \,. \end{cases}$$
Poiché il sistema precedente non ammette soluzioni, non ci sono punti estremanti all'interno di T.

2. Poiché f è continua e l'insieme T è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in T. Poiché all'interno di T, come

visto nel punto precedente, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di T.

• lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = y - 1 =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = 1 > 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $y \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato a, mentre $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a.

• lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = (x/2 - 1)(x^2 + 1) =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 4x + 1)\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $x \in [0,1/3)$ ed è decrescente quando $x \in (1/3,1]$. Pertanto $(0,0)$ e $(1,0)$ sono punti di minimo per f vincolati al lato b, mentre $(1/3,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b.

• lato $c := \{y = 1 - x,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,1-x) = -\frac{x}{2} - \frac{x^3}{2} =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^2 < 0\,;$$

quindi la funzione è decrescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolato al lato c, mentre $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato c.

Poiché

$$\begin{matrix} f(0,0) = -1 & & f(0,1) = 0 \\ & \text{e} & \\ f(1,0) = -1 & & f(1/3,0) = -5/6 \cdot 10/9 < 0 \end{matrix}$$

si ricava subito che $(0,0)$ e $(1,0)$ sono punti di minimo assoluto per f su T, mentre $(0,1)$ è punto di massimo assoluto per f su T.

Esercizio 4

1. Il campo di esistenza della funzione proposta è dato dalle seguenti condizioni:

$$1 + x > 0 \qquad \text{e} \qquad x \neq 3\,,$$

da cui $A = (-1,3) \cup (3,+\infty)$.

2. Poiché

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to 3^\pm} f(x) = \pm\infty\,,$$

le rette di equazione $x = -1$ e $x = 3$ sono asintoti verticali per f. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{\log(1+x)}{1+x^2} + \frac{x^2 - x^2 + 3x}{x-3}\right] = 3\,,$$

si ottiene che non ci sono asintoti orizzontali a $+\infty$, mentre la retta $y = x + 3$ è asintoto obliquo a $+\infty$.

Esercizio 5

Poiché

$$l := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3^n + 1}} = \frac{1}{3}\,,$$

si ottiene subito che il raggio di convergenza della serie proposta è $R = 3$.

Esercizio 6

Ad esempio si può considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1, \\ \sqrt{|x - 10|} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

Osserviamo innanzitutto che la serie proposta è a termini positivi.

1. Per $\alpha = 2$, essa si riscrive nella forma
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4n \log^2 n}{4^{4n}},$$
ed utilizzando il criterio della radice si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4n\log^2 n}{4^{4n}}} = \frac{1}{4^4} < 1,$$
pertanto la serie converge.
2. Per $\alpha \in \mathbb{R}$, sempre utilizzando il criterio della radice, si ottiene
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{4n\log^2 n}{4^{2\alpha n}}} = \frac{1}{4^{2\alpha}},$$
quindi la serie converge se $1/4^{2\alpha} < 1$, cioè $\alpha > 0$, e diverge se $1/4^{2\alpha} > 1$, cioè $\alpha < 0$. Per $\alpha = 0$ il criterio non fornisce alcuna informazione, pertanto bisogna procedere per altra via. Sostituendo $\alpha = 0$ nella serie proposta, si osserva subito che il termine generale $a_n = 4n\log^2 n$ non è infinitesimo, pertanto la serie diverge.

Esercizio 2

1. L'equazione differenziale proposta è un'equazione del primo ordine sia lineare che a variabili separabili, pertanto può essere risolta in entrambi i modi. Noi procederemo tramite la formula risolutiva per le equazioni lineari del primo ordine, che fornisce:
$$\begin{aligned} y(x) &= C\exp\left(\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx\right) + \exp\left(\int \frac{\log^2 x}{x}\,dx\right)\int \frac{\log^2 x}{x}\,\exp\left(-\int \frac{\log^2 x}{x}\right)\,dx \\ &= C\exp\left(\frac{\log^3 x}{3}\right) - 1\,. \end{aligned}$$
Imponendo la condizione iniziale $y(1) = 2$, si ottiene $C = 3$ e quindi la soluzione sarà
$$y(x) = 3\exp\left(\frac{\log^3 x}{3}\right) - 1\,.$$
2. Tenendo conto del punto precedente, si ottiene
$$\lim_{x\to 0^+} y(x) = \lim_{x\to 0^+}\left[3\exp\left(\frac{\log^3 x}{3}\right) - 1\right] = -1\,.$$

Esercizio 3

1. All'interno dell'insieme T, poiché la funzione è regolare, procediamo cercando i punti stazionari, cioè i punti che annullano il gradiente:
$$\begin{cases} f_x(x,y) = y^2 + 1 = 0 \\ f_y(x,y) = \dfrac{1}{2}(y^2+1) + 2y(x - 1 + y/2) = 0\,. \end{cases}$$
Poiché il sistema precedente non ammette soluzioni, non ci sono punti estremanti all'interno di T.

2. Poiché f è continua e l'insieme T è chiuso e limitato, per il Teorema di Weierstrass la funzione ammette almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto in T. Poiché all'interno di T, come visto nel punto precedente, non vi sono estremanti, essi saranno necessariamente sulla frontiera. Per determinarli, studiamo la restrizione di f alla frontiera di T.

• lato $a := \{x = 0,\ y \in [0,1]\}$:

$$f(0,y) = (y/2 - 1)(y^2 + 1) =: g_1(y) \qquad \text{da cui} \qquad g_1'(y) = \frac{1}{2}(3y^2 - 4y + 1)\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $y \in [0,1/3)$ ed è decrescente quando $y \in (1/3,1]$. Pertanto $(0,0)$ e $(0,1)$ sono punti di minimo per f vincolati al lato a, mentre $(0,1/3)$ è punto di massimo per f vincolato al lato a.

• lato $b := \{y = 0,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,0) = x - 1 =: g_2(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_2'(x) = 1 > 0\,;$$

quindi la funzione è crescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolato al lato b, mentre $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato b.

• lato $c := \{y = 1 - x,\ x \in [0,1]\}$:

$$f(x,1-x) = \frac{x^3}{2} - \frac{3x^2}{2} + 2x - 1 =: g_3(x) \qquad \text{da cui} \qquad g_3'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 6x + 4)\,.$$

Poiché $g_3'(x)$ risulta essere sempre positiva, la funzione è crescente quando $x \in [0,1]$. Pertanto $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolato al lato c, mentre $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolato al lato c.

Poiché

$$\begin{array}{lcl} f(0,0) = -1 & & f(1,0) = 0 \\ & \text{e} & \\ f(0,1) = -1 & & f(0,1/3) = -5/6 \cdot 10/9 < 0 \end{array}$$

si ricava subito che $(0,0)$ e $(0,1)$ sono punti di minimo assoluto per f su T, mentre $(1,0)$ è punto di massimo assoluto per f su T.

Esercizio 4

1. Il campo di esistenza della funzione proposta è dato dalle seguenti condizioni:

$$1 - 3x > 0 \qquad \text{e} \qquad x \neq -3\,,$$

da cui $A = (-\infty,-3) \cup (-3,1/3)$.

2. Poiché

$$\lim_{x\to 1/3^-} f(x) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to -3^\pm} f(x) = \pm\infty\,,$$

le rette di equazione $x = 1/3$ e $x = -3$ sono asintoti verticali per f. Inoltre, poiché

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$$

$$\text{e} \qquad \lim_{x\to-\infty} [f(x) - 2x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{\log(1-3x)}{2+5x^2} + \frac{2x^2 - 2x^2 - 6x}{x+3}\right] = -6\,,$$

si ottiene che non ci sono asintoti orizzontali a $+\infty$, mentre la retta $y = 2x - 6$ è asintoto obliquo a $-\infty$.

Esercizio 5

Poiché

$$l := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{4^n + 2}} = \frac{1}{4}\,,$$

si ottiene subito che il raggio di convergenza della serie proposta è $R = 4$.

Esercizio 6

Ad esempio si può considerare la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0, \\ |x - 5| & \text{se } x > 0. \end{cases}$$