SOLUZIONI COMPITO dell'11/07/2011
ANALISI 1 - MECCANICA 9 CFU
CALCOLO DIFF. e INT. I+II - MECCANICA 11 CFU

TEMA A

Esercizio 1

La funzione proposta è chiaramente continua per $x \neq 0$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue. Quindi studiamone la continuità in $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(x\sqrt[5]{2x-4} + \mathrm{e}^x\right) = f(0) = 1\,,$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 3|x+1| = 3\,,$$

pertanto $x = 0$ è un punto di salto. Per quanto riguarda la derivabilità, chiaramente f è derivabile per $x \neq 0\,,\ x \neq 2\,,\ x \neq -1$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili, mentre non lo è per $x = 0$, in quanto in tale punto non è neppure continua. Studiamo, quindi, la derivabilità in $x = 2$ e $x = -1$:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[5]{2x-4} + \frac{2x}{5\sqrt[5]{(2x-4)^4}} + \mathrm{e}^x & \text{per } 0 < x < 2 \text{ e } x > 2, \\ 3\mathrm{sign}(x+1) & \text{per } x < -1 \text{ e } -1 < x < 0. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 2^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 2^\pm} \left(\frac{2x}{5\sqrt[5]{(2x-4)^4}} + \mathrm{e}^2\right) = +\infty\,;$$
$$\lim_{x\to -1^\pm} f'(x) = \lim_{x\to -1^\pm} 3\mathrm{sign}(x+1) = \pm 3\,;$$

da cui si ricava che $x = 2$ è punto di flesso a tangente verticale, in quanto $f' > 0$ in un intorno di $x = 2$ e diverge a $+\infty$ per $x \to 2^\pm$, mentre $x = -1$ è punto angoloso.

Esercizio 2

Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x+1}$, da cui $dx = 2t\,dt$, $t(-1) = 0$ e $t(0) = 1$, si ricava

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{x+1}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^1 2t^2\mathrm{e}^t\,dt = 2t^2\mathrm{e}^t\Big|_0^1 - 4\int_0^1 t\,\mathrm{e}^t\,dt$$
$$= 2\mathrm{e} - 4t\,\mathrm{e}^t\Big|_0^1 + 4\int_0^1 \mathrm{e}^t\,dt = 2\mathrm{e} - 4\mathrm{e} + 4\mathrm{e}^t\Big|_0^1 = 2\mathrm{e} - 4\,,$$

dove, nella seconda e nella terza uguaglianza, è stata effettuata un'integrazione per parti.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda+3)^2 = 0$. Essa ha come soluzione $\lambda = -3$ con molteplicità algebrica 2, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è della forma $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2x\mathrm{e}^{-3x}$. Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo di somiglianza, che fornisce $y_p(x) = A\mathrm{e}^{-4x}$. Essendo, $y_p'(x) = -4A\mathrm{e}^{-4x}$ e $y_p''(x) = 16A\mathrm{e}^{-4x}$, inserendo nell'equazione completa, otteniamo $16A - 24A + 9A = 3$, ovvero $A = 3$ e, quindi, l'integrale generale risulta essere $y(x) = C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2x\mathrm{e}^{-3x} + 3\mathrm{e}^{-4x}$. Infine

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)\,\frac{\mathrm{e}^{3x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} (C_1\mathrm{e}^{-3x} + C_2x\mathrm{e}^{-3x} + 3\mathrm{e}^{-4x})\,\frac{\mathrm{e}^{3x}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{C_1}{x} + C_2 + 3\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\right) = C_2\,.$$

Pertanto, le soluzioni richieste sono tutte e sole quelle che si ottengono imponendo $C_2 = 10$, ovvero la famiglia di soluzioni ad un parametro date da

$$y(x) = C\mathrm{e}^{-3x} + 10x\mathrm{e}^{-3x} + 3\mathrm{e}^{-4x}\,, \qquad \forall C \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4
Tenendo conto degli sviluppi di Mc Laurin al terzo ordine per le funzioni $x \mapsto \sinh x$ e $x \mapsto \log(1+x)$, otteniamo

$$\sinh\left(\frac{3\alpha}{n^2+1}\right) = \frac{3\alpha}{n^2+1} + \frac{27\alpha^3}{6(n^2+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^6}\right),$$
$$\log\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right) = \frac{2}{n^2+1} - \frac{2}{(n^2+1)^2} + \frac{8}{3(n^2+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^6}\right).$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} a_n(\alpha) :&= \left[\sinh\left(\frac{3\alpha}{n^2+1}\right) - \log\left(1+\frac{2}{n^2+1}\right)\right] n^{1+\alpha} \\ &\sim \begin{cases} \left(\frac{3\alpha}{n^2+1} - \frac{2}{n^2+1}\right) n^{1+\alpha} & \text{se } \alpha \neq 2/3; \\ \left(\frac{27\alpha^3}{6(n^2+1)^3} + \frac{2}{(n^2+1)^2} - \frac{8}{3(n^2+1)^3}\right) n^{1+\alpha} & \text{se } \alpha = 2/3. \end{cases} \end{aligned}$$
$$\implies \quad a_n(\alpha) \sim \begin{cases} \frac{3\alpha-2}{n^{1-\alpha}} & \text{se } \alpha \neq 2/3; \\ \frac{2}{n^{7/3}} & \text{se } \alpha = 2/3. \end{cases}$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con il termine generale della serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge per $\alpha = 2/3$ oppure per $\alpha \neq 2/3$, ma $1-\alpha > 1$, ovvero converge per $\alpha < 0$ e $\alpha = 2/3$, mentre diverge per $0 \leq \alpha < 2/3$ e $\alpha > 2/3$.

Esercizio 5
Ricordando il Teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$\varphi'(x) = f'\left(\frac{1}{x} + 2\log x\right)\left(-\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\right) \qquad \implies \qquad \varphi'(1) = f'(1) \cdot 1 = 5\,.$$

Esercizio 6
Per determinare il dominio della funzione proposta bisogna imporre le condizioni

$$\begin{cases} -1 \leq x+y \leq 1\,, \\ 4 - x^2 - y^2 > 0\,, \end{cases} \qquad \implies \qquad \begin{cases} y \geq -x-1\,, \\ y \leq 1-x\,, \\ x^2+y^2 < 4\,. \end{cases}$$

Pertanto, il dominio D è rappresentato dalla porzione di cerchio di centro $(0,0)$ e raggio 2 compreso fra le due rette $y = -x-1$ e $y = -x+1$, incluse le rette stesse ed escluse le parti di circonferenza.

TEMA B

Esercizio 1

La funzione proposta è chiaramente continua per $x \neq 1$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni continue. Quindi studiamone la continuità in $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \Big((x-1)\sqrt[4]{|x-3|} + \log x\Big) = f(1) = 0\,,$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \sin|x - 1 + \pi/2| - 1 = 0\,,$$

pertanto $x = 0$ è un punto di continuità, ovvero f risulta continua su tutto $\mathbb{R}$. Per quanto riguarda la derivabilità, chiaramente f è derivabile per $x \neq 1$, $x \neq 3$, $x \neq 1 - \pi/2$, in quanto composizione algebrica e funzionale di funzioni derivabili. Studiamo, quindi, la derivabilità in tali punti:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt[4]{|x-3|} + \frac{(x-1)\mathrm{sign}(x-3)}{4\sqrt[4]{(|x-3|)^3}} + \frac{1}{x} & \text{per } 1 < x < 3 \text{ e } x > 3, \\ \mathrm{sign}(x-1+\pi/2)\cos|x-1+\pi/2| & \text{per } x < 1-\pi/2 \text{ e } 1-\pi/2 < x < 1. \end{cases}$$

Pertanto,

$$\lim_{x\to 3^\pm} f'(x) = \lim_{x\to 3^\pm} \left(\frac{(x-1)\mathrm{sign}(x-3)}{4\sqrt[4]{(|x-3|)^3}} + \frac{1}{3}\right) = \pm\infty\,;$$
$$\lim_{x\to (1-\pi/2)^\pm} f'(x) = \lim_{x\to (1-\pi/2)^\pm} \mathrm{sign}(x-1+\pi/2)\cos|x-1+\pi/2| = \pm 1\,;$$
$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \left(\sqrt[4]{|x-3|} + \frac{(x-1)\mathrm{sign}(x-3)}{4\sqrt[4]{(|x-3|)^3}} + \frac{1}{x}\right) = \sqrt[4]{2} + 1\,;$$
$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \mathrm{sign}(x-1+\pi/2)\cos|x-1+\pi/2| = 0\,;$$

da cui si ricava che $x = 3$ è punto di cuspide, $x = 1 - \pi/2$ e $x = 1$ sono punti angolosi.

Esercizio 2

Effettuando la sostituzione $t = \sqrt[3]{x+3}$, da cui $dx = 3t^2\,dt$, $t(-3) = 0$ e $t(-2) = 1$, si ricava

$$\int_{-3}^{-2} \frac{1}{\sqrt[3]{x+3}}\log(1+\sqrt[3]{x+3})\,dx = \int_0^1 3\frac{t^2}{t}\log(1+t)\,dt = \frac{3}{2}t^2\log(1+t)\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t}\,dt$$
$$= \frac{3}{2}\log 2 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{t^2-1+1}{1+t}\,dt = \frac{3}{2}\log 2 - \frac{3}{4}(t-1)^2\Big|_0^1 - \frac{3}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,dt$$
$$= \frac{3}{2}\log 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\log(1+t)\Big|_0^1 = \frac{3}{4}\,,$$

dove, nella seconda e nella quarta uguaglianza, è stata effettuata un'integrazione per parti.

Esercizio 3

L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica associata è $4\lambda^2 - 16\lambda + 16 = (2\lambda - 4)^2 = 0$. Essa ha come soluzione $\lambda = 2$ con molteplicità algebrica 2, pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è della forma $y_0(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x}$. Per determinare una soluzione particolare utilizziamo il metodo di somiglianza, che fornisce $y_p(x) = A\mathrm{e}^{3x}$. Essendo, $y_p'(x) = 3A\mathrm{e}^{3x}$ e $y_p''(x) = 9A\mathrm{e}^{3x}$, inserendo nell'equazione completa, otteniamo $36A - 48A + 16A = 4$, ovvero $A = 1$ e, quindi, l'integrale generale risulta essere $y(x) = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}$. Infine

$$\lim_{x\to-\infty} y(x)\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x})\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{C_1}{x} + C_2 + \frac{\mathrm{e}^x}{x}\right) = C_2\,.$$

Pertanto, le soluzioni richieste sono tutte e sole quelle che si ottengono imponendo $C_2 = 5$, ovvero la famiglia di soluzioni ad un parametro date da

$$y(x) = C\mathrm{e}^{2x} + 5x\mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^{3x}\,, \qquad \forall C \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 4
Tenendo conto degli sviluppi di Mc Laurin al terzo ordine per le funzioni $x \mapsto \sin x$ e $x \mapsto \mathrm{e}^x$, otteniamo

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{4}{n+1}\right) &= \frac{4}{n+1} - \frac{64}{6(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\,,\\ \mathrm{e}^{\frac{6\alpha}{n+1}} &= 1 + \frac{6\alpha}{n+1} + \frac{36\alpha^2}{2(n+1)^2} + \frac{216\alpha^3}{6(n+1)^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\,.\end{aligned}$$

Pertanto,

$$\begin{aligned} a_n(\alpha) &:= \left[\sin\left(\frac{4}{n+1}\right) + 1 - \mathrm{e}^{\frac{6\alpha}{n+1}}\right] n^{1-\alpha}\\ &\sim \begin{cases} \left(\frac{4}{n+1} + 1 - 1 - \frac{6\alpha}{n+1}\right) n^{1-\alpha} & \text{se } \alpha \neq 2/3;\\ \left(-\frac{64}{6(n+1)^3} - \frac{36\alpha^2}{2(n+1)^2} - \frac{216\alpha^3}{6(n+1)^3}\right) n^{1-\alpha} & \text{se } \alpha = 2/3. \end{cases}\\ \Longrightarrow \quad a_n(\alpha) &\sim \begin{cases} \frac{4-6\alpha}{n^\alpha} & \text{se } \alpha \neq 2/3;\\ -\frac{8}{n^{5/3}} & \text{se } \alpha = 2/3. \end{cases}\end{aligned}$$

Quindi, per il criterio del confronto asintotico con il termine generale della serie armonica generalizzata, avremo che la serie proposta converge per $\alpha = 2/3$ oppure per $\alpha \neq 2/3$, ma $\alpha > 1$, ovvero converge per $\alpha > 1$ e $\alpha = 2/3$, mentre diverge per $2/3 < \alpha \leq 1$ e $\alpha < 2/3$.

Esercizio 5
Ricordando il Teorema di derivazione della funzione composta, otteniamo

$$\varphi'(x) = f'(x + x^2)(1 + 2x) \qquad \Longrightarrow \qquad \varphi'(0) = f'(0) \cdot 1 = 2\,.$$

Esercizio 6
Per determinare il dominio della funzione proposta bisogna imporre le condizioni

$$\begin{cases} -1 \leq x + y \leq 1\,,\\ 4 - x^2 - y^2 > 0\,, \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} y \geq -x - 1\,,\\ y \leq 1 - x\,,\\ x^2 + y^2 < 4\,. \end{cases}$$

Pertanto, il dominio D è rappresentato dalla porzione di cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 2 compreso fra le due rette $y = -x - 1$ e $y = -x + 1$, incluse le rette stesse ed escluse le parti di circonferenza.