SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

C.E. $= (-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$;

$f(x)>0 \ \ \forall x>0;\qquad f(x)<0 \ \ \forall x<0,\ x\neq -1\ ;\qquad f(0)=0\ ;$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=0\ ;\qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\ ;\qquad \lim_{x\to-1^{\pm}} f(x)=-\infty\ ;$

$f'(x)=\dfrac{(x^2+1)\mathrm{e}^x}{(x+1)^3}\ ;\qquad f'(x)>0 \ \ \forall x\in(-1,+\infty)\ ;\qquad f'(x)<0 \ \ \forall x\in(-\infty,-1)\ .$

La funzione assegnata ha asintoto orizzontale $y=0$, per $x\to-\infty$, ha asintoto verticale in $x=-1$, non ha asintoti per $x\to+\infty$.

FAC. :

$$f''(x)=\frac{\mathrm{e}^x(x^3+3x-2)}{(x+1)^4}\ ;$$

studiando la cubica $h(x)=x^3+3x-2$, si osserva che essa ha un unico zero in $x=\alpha$ con $\alpha>0$, pertanto la funzione risulterà concava per $x<\alpha,\ x\neq-1$, covessa per $x>\alpha$ ed ha un unico flesso nel punto $x=\alpha$.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la funzione $h(t)=\frac{\mathrm{e}^t-1}{t}$ è continua nell'intervallo $(1,x)$, per ogni $x>1$ e pertanto è ivi integrabile. La funzione g è quindi continua in $x=1$.

Osserviamo poi che

$$g'(x)=\begin{cases}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x} & \text{se } x>1\ ;\\[2ex] 1 & \text{se } x<1\ .\end{cases}$$

Calcolando, infine, i limiti destro e sinistro di g' per $x\to1$, si ottiene

$$\lim_{x\to1^-} g'(x)=1 \qquad \lim_{x\to1^+} g'(x)=\mathrm{e}-1$$

che sono entrambi finiti, ma diversi. Pertanto, segue che $x=1$ è punto angoloso per la funzione g.

Esercizio 3

Ponendo $a_n=\frac{[2(\log n)^{\alpha-7}]^n}{n^2}$ ed osservando che, per ogni $n\geq2$, $a_n>0$, possiamo applicare il criterio della radice, ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=2\lim_{n\to+\infty}\frac{(\log n)^{\alpha-7}}{n^{2/n}}=\begin{cases}2 & \text{se } \alpha=7\ ;\\ +\infty & \text{se } \alpha>7\ ;\\ 0 & \text{se } \alpha<7\ .\end{cases}$$

Pertanto la serie proposta converge per $\alpha<7$, mentre diverge a $+\infty$ per $\alpha\geq7$.

Esercizio 4

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(0,1)$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^3\sin(y-1)}{x^2+y^2-2y+1}=\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x^3(y-1)}{x^2+(y-1)^2}=\lim_{\rho\to0^+}\frac{\rho^4\cos^3\theta\sin\theta}{\rho^2}=0\ .$$

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

C.E. $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

$f(x) > 0 \;\; \forall x > 0; \qquad f(x) < 0 \;\; \forall x < 0, \; x \neq -1 \; ; \qquad f(-1) = 0$;

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \; ; \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \; ; \qquad \lim_{x\to 0^{\pm}} f(x) = \pm\infty$;

$f'(x) = -\dfrac{(x+1)(x^2+1)}{x^2 e^x} \; ; \qquad f'(-1) = 0$;

$f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (-\infty, -1) \; ; \qquad f'(x) < 0 \;\; \forall x \in (-1, +\infty,) \setminus \{0\}$.

La funzione assegnata ha asintoto orizzontale $y = 0$, per $x \to +\infty$, ha asintoto verticale in $x = 0$, non ha asintoti per $x \to -\infty$, ha un punto di massimo relativo in $x = -1$.

FAC. :

$$f''(x) = \frac{x^4 + (x+1)^2 + 1}{x^3 e^x} \; ,$$

che risulta concorde con il segno di x. Pertanto la funzione risulterà concava per $x < 0$ e covessa per $x > 0$.

Esercizio 2

Osserviamo innanzitutto che la funzione $h(t) = \frac{\log(1+t)}{t}$ è continua nell'intervallo $(2, x)$, per ogni $x > 2$ e pertanto è ivi integrabile. La funzione g è quindi continua in $x = 2$.

Osserviamo poi che

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 2 \; ; \\ \frac{\log(1+x)}{x} & \text{se } x > 2 \; . \end{cases}$$

Calcolando, infine, i limiti destro e sinistro di g' per $x \to 2$, si ottiene

$$\lim_{x\to 2^-} g'(x) = 2 \qquad \lim_{x\to 2^+} g'(x) = \frac{\log 3}{2}$$

che sono entrambi finiti, ma diversi. Pertanto, segue che $x = 2$ è punto angoloso per la funzione g.

Esercizio 3

Ponendo $a_n = \frac{3^n n^3}{[(\log n)^{\alpha-5}]^n}$ ed osservando che, per ogni $n \geq 2$, $a_n > 0$, possiamo applicare il criterio della radice, ottenendo

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = 3 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{3/n}}{(\log n)^{\alpha-5}} = \begin{cases} 3 & \text{se } \alpha = 5 \; ; \\ +\infty & \text{se } \alpha < 5 \; ; \\ 0 & \text{se } \alpha > 5 \; . \end{cases}$$

Pertanto la serie proposta converge per $\alpha > 5$, mentre diverge a $+\infty$ per $\alpha \leq 5$.

Esercizio 4

Effettuando un cambiamento in coordinate polari centrate nel punto $(2, 0)$, si ottiene

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y \sin[(x-2)^2]}{x^2 - 4x + y^2 + 4} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{y(x-2)^2}{(x-2)^2 + y^2} = \lim_{\rho\to 0^+} \frac{\rho^3 \cos^2\theta \sin\theta}{\rho^2} = 0 \; .$$