SOLUZIONI COMPITO INTEGRATIVO

Esercizio 1

a) Il problema di Cauchy proposto è associato ad un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti, la cui equazione caratteristica è data $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, che ha come soluzioni $\lambda = -1$ e $\lambda = 2$. Pertanto, l'integrale generale dell'equazione omogenea sarà dato da $y_0(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x}$. Tenendo conto che il termine noto non è soluzione dell'equazione omogenea associata, la soluzione particolare si può ottenere applicando il metodo di somiglianza, da cui $y_p(x) = A\mathrm{e}^x$. Sostituendo nell'equazione si ricava $A = 1$, da cui si ottiene che l'integrale generale dell'equazione completa è dato da

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x\,.$$

b) Imponendo le condizioni iniziali, si giunge al sistema

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + 1 = 2 \\ -C_1 + 2C_2 + 1 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 3C_2 + 2 = 2 \\ -C_1 + 2C_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$. Pertanto la soluzione cercata sarà data da

$$y(x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^x = 2\cosh x\,.$$

c) Imponendo invece la condizione di limite sull'integrale generale, si ottiene

$$\lim_{x\to-\infty} \left[C_1 \mathrm{e}^{-x} + C_2 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x\right] = 0\,.$$

Tale condizione è verificata se e solo se $C_1 = 0$. Quindi si ricava che l'equazione differenziale proposta ha un'infinità di soluzioni, soddisfacenti la condizione di limite assegnata, data dalla famiglia delle funzioni

$$y(x) = C_2 \mathrm{e}^{2x} + \mathrm{e}^x, \qquad C_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Esercizio 2

Poiché l'insieme di integrazione è un rettangolo e la funzione $f(x, y) = 3y\,\mathrm{e}^{2x+y^2} = \mathrm{e}^{2x} \cdot 3y\,\mathrm{e}^{y^2}$ è a variabili separabili, dal Teorema di Riduzione per gli integrali doppi si ricava

$$\iint_E 3y\,\mathrm{e}^{2x+y^2}\;dxdy = \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\;dx\right)\left(\int_{-2}^0 3y\,\mathrm{e}^{y^2}\;dy\right) = \left(\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{2x}\Big|_0^1\right)\left(\frac{3}{2}\,\mathrm{e}^{y^2}\Big|_{-2}^0\right) = \frac{3}{4}(\mathrm{e}^2 - 1)(1 - \mathrm{e}^4).$$