SOLUZIONI COMPITO A

Esercizio 1

I problemi di Cauchy proposti sono entrambi associati ad un'equazione differenziale che, per $x \neq 0$, si può ricondurre ad un'equazione a variabili separabili in forma normale, data da

$$y'(x) = \frac{2}{3x}\,(y^2 - 4)\,.$$

Tale equazione ha come integrali singolari $y(x) \equiv \pm 2$, pertanto $y(x) \equiv 2$ rappresenta l'unica soluzione del secondo problema di Cauchy ed è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Per $y \neq \pm 2$, separando le variabili, si ottiene:

$$\int \frac{1}{y^2-4}\,dy = \int \frac{2}{3x}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{4}\int \frac{1}{y-2}\,dy - \frac{1}{4}\int \frac{1}{y+2}\,dy = \frac{2}{3}\log|x| + C$$

$$\frac{1}{4}\log\left|\frac{y(x)-2}{y(x)+2}\right| = \frac{2}{3}\log|x| + C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y(x)-2}{y(x)+2} = Kx^{8/3}\,,$$

da cui, dopo aver imposto la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \frac{2 - \frac{2}{3}x^{8/3}}{1 + \frac{1}{3}x^{8/3}} = \frac{6 - 2x^{8/3}}{3 + x^{8/3}}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, grazie al Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, la funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, in quanto le sue derivate parziali sono continue su tutto il piano. Pertanto essa è anche continua su Q, che è un insieme compatto; quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto.

Studiamo innanzitutto la funzione f all'interno del quadrato Q. Si ottiene facilmente

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \cosh x^2 \neq 0 \\ f_y(x,y) = 3\sinh y^2 \end{cases}$$

e quindi non c'è nessun punto stazionario per f all'interno di Q. Studiamo ora f sul bordo di Q.

<u>Lato a: $0 \le x \le 1\,,\ y = 0$.</u> Otteniamo

$$f(x,0) = \int_0^x \cosh t^2\,dt =: g_1(x) \qquad g_1'(x) = \cosh x^2 > 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato a, mentre il punto $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato a.

<u>Lato b: $x = 1\,,\ 0 \le y \le 1$.</u> Otteniamo

$$f(1,y) = \int_0^1 \cosh t^2\,dt + \int_0^y 3\sinh t^2\,dt =: g_2(y)\,, \qquad g_2'(y) = 3\sinh y^2 \ge 0\,.$$

Pertanto il punto $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato b, mentre il punto $(1,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato b.

<u>Lato c: $0 \le x \le 1\,,\ y = 1$.</u> Otteniamo

$$f(x,1) = \int_0^x \cosh t^2\,dt + \int_0^1 3\sinh t^2\,dt =: g_3(x)\,, \qquad g_3'(x) = \cosh x^2 > 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato c, mentre il punto $(1,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato c.

<u>Lato d: $x = 0\,,\ 0 \le y \le 1$.</u> Otteniamo

$$f(0,y) = \int_0^y 3\sinh t^2\,dt =: g_4(y)\,, \qquad g_4'(y) = 3\sinh y^2 \ge 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato d, mentre il punto $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato d.

In conclusione, il punto $(0,0)$ è l'unico punto di minimo assoluto per f in Q, mentre il punto $(1,1)$ è l'unico punto di massimo assoluto per f in Q.

Esercizio 3
Determiniamo innanzitutto l'insieme delle primitive di f, che sarà dato da

$$\int \frac{\log^2(2\tan x)}{(\cos x)^2(\tan x)}\,dx = \left(\int t^2\,dt\right)_{t=\log(2\tan x)} = \frac{\log^3(2\tan x)}{3} + C$$

dove abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $\log(2\tan x) = t$, da cui $\frac{1}{(\cos x)^2(\tan x)}\,dx = dt$. Imponendo ora la condizione richiesta, si ottiene

$$0 = F(\pi/4) = \frac{\log^3(2\tan(\pi/4))}{3} + C = \frac{\log^3 2}{3} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{\log^3 2}{3}\,,$$

da cui $F(x) = \frac{\log^3(2\tan x) - \log^3 2}{3}$.

Domanda 1
Poiché f e g sono funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}^+$, per garantire che l'integrale proposto esista finito, è sufficiente che, per $x \to +\infty$, $f(x)\,g(x) \sim 1/x^2$, pertanto l'unica risposta corretta è la d).

SOLUZIONI COMPITO B

Esercizio 1

I problemi di Cauchy proposti sono entrambi associati ad un'equazione differenziale che, per $x \neq 0$, si può ricondurre ad un'equazione a variabili separabili in forma normale, data da

$$y'(x) = \frac{1}{x^2}\,(y^2 - 16)\,.$$

Tale equazione ha come integrali singolari $y(x) \equiv \pm 4$, pertanto $y(x) \equiv -4$ rappresenta l'unica soluzione del secondo problema di Cauchy ed è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Per $y \neq \pm 4$, separando le variabili, si ottiene:

$$\int \frac{1}{y^2-16}\,dy = \int \frac{1}{x^2}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{8}\int \frac{1}{y-4}\,dy - \frac{1}{8}\int \frac{1}{y+4}\,dy = -\frac{1}{x} + C$$

$$\frac{1}{8}\log\left|\frac{y(x)-4}{y(x)+4}\right| = -\frac{1}{x} + C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y(x)-4}{y(x)+4} = K\mathrm{e}^{-8/x}\,,$$

da cui, dopo aver imposto la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \frac{4 - \frac{4}{8-1/\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{-8/x}}{1 + \frac{1}{8-1/\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{-8/x}} = \frac{32\mathrm{e} - 4 - 4\mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-8/x}}{8\mathrm{e} - 1 + \mathrm{e}\,\mathrm{e}^{-8/x}}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, grazie al Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, la funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, in quanto le sue derivate parziali sono continue su tutto il piano. Pertanto essa è anche continua su Q, che è un insieme compatto; quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto.

Studiamo innanzitutto la funzione f all'interno del quadrato Q. Si ottiene facilmente

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 3\cosh x^2 \neq 0 \\ f_y(x,y) = -2\sinh y^2 \end{cases}$$

e quindi non c'è nessun punto stazionario per f all'interno di Q. Studiamo ora f sul bordo di Q.

<u>Lato a: $0 \le x \le 1\,,\ y = 0$.</u> Otteniamo

$$f(x,0) = \int_0^x 3\cosh t^2\,dt =: g_1(x) \qquad g_1'(x) = 3\cosh x^2 > 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato a, mentre il punto $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato a.

<u>Lato b: $x = 1\,,\ 0 \le y \le 1$.</u> Otteniamo

$$f(1,y) = \int_0^1 3\cosh t^2\,dt - \int_0^y 2\sinh t^2\,dt =: g_2(y)\,, \qquad g_2'(y) = -2\sinh y^2 \le 0\,.$$

Pertanto il punto $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato b, mentre il punto $(1,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato b.

<u>Lato c: $0 \le x \le 1\,,\ y = 1$.</u> Otteniamo

$$f(x,1) = \int_0^x 3\cosh t^2\,dt - \int_0^1 2\sinh t^2\,dt =: g_3(x)\,, \qquad g_3'(x) = 3\cosh x^2 > 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato c, mentre il punto $(1,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato c.

<u>Lato d: $x = 0\,,\ 0 \le y \le 1$.</u> Otteniamo

$$f(0,y) = -\int_0^y 2\sinh t^2\,dt =: g_4(y)\,, \qquad g_4'(y) = -2\sinh y^2 \le 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato d, mentre il punto $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato d.

In conclusione, il punto $(0,1)$ è l'unico punto di minimo assoluto per f in Q, mentre il punto $(1,0)$ è l'unico punto di massimo assoluto per f in Q.

Esercizio 3
Determiniamo innanzitutto l'insieme delle primitive di f, che sarà dato da

$$\int \frac{\sin x}{(\cos x)\log^2(\cos x)}\,dx = \left(-\int \frac{1}{t^2}\,dt\right)_{t=\log(\cos x)} = \frac{1}{\log(\cos x)} + C$$

dove abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $\log(\cos x) = t$, da cui $\frac{\sin x}{(\cos x)}\,dx = -dt$. Imponendo ora la condizione richiesta, si ottiene

$$0 = F(\pi/3) = \frac{1}{\log(\cos(\pi/3))} + C = -\frac{1}{\log 2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{1}{\log 2}\,,$$

da cui $F(x) = \frac{1}{\log(\cos x)} + \frac{1}{\log 2}$.

Domanda 1
Poiché f e g sono funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}^+$, per garantire che l'integrale proposto esista finito, è sufficiente che, per $x \to 0^+$, f sia limitata e $g(x) \sim 1/\sqrt{x}$, pertanto l'unica risposta corretta è la b).

SOLUZIONI COMPITO C

Esercizio 1

I problemi di Cauchy proposti sono entrambi associati ad un'equazione differenziale che, per $x \neq 0$, si può ricondurre ad un'equazione a variabili separabili in forma normale, data da

$$y'(x) = \frac{1}{2x^2}\,(y^2 - 16)\,.$$

Tale equazione ha come integrali singolari $y(x) \equiv \pm 4$, pertanto $y(x) \equiv 4$ rappresenta l'unica soluzione del secondo problema di Cauchy ed è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Per $y \neq \pm 4$, separando le variabili, si ottiene:

$$\int \frac{1}{y^2-16}\,dy = \int \frac{1}{2x^2}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{8}\int \frac{1}{y-4}\,dy - \frac{1}{8}\int \frac{1}{y+4}\,dy = -\frac{1}{2x} + C$$

$$\frac{1}{8}\log\left|\frac{y(x)-4}{y(x)+4}\right| = -\frac{1}{2x} + C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y(x)-4}{y(x)+4} = K\mathrm{e}^{-4/x}\,,$$

da cui, dopo aver imposto la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \frac{4 - \frac{4}{8-\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{-4/x}}{1 + \frac{1}{8-\mathrm{e}}\,\mathrm{e}^{-4/x}} = \frac{32 - 4\mathrm{e} - 4\mathrm{e}^{-4/x}}{8 - \mathrm{e} + \mathrm{e}^{-4/x}}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, grazie al Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, la funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, in quanto le sue derivate parziali sono continue su tutto il piano. Pertanto essa è anche continua su Q, che è un insieme compatto; quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto.

Studiamo innanzitutto la funzione f all'interno del quadrato Q. Si ottiene facilmente

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -3\cosh x^2 \neq 0 \\ f_y(x,y) = 2\sinh y^2 \end{cases}$$

e quindi non c'è nessun punto stazionario per f all'interno di Q. Studiamo ora f sul bordo di Q.

<u>Lato a: $0 \leq x \leq 1\,,\ y = 0$.</u> Otteniamo

$$f(x,0) = -\int_0^x 3\cosh t^2\,dt =: g_1(x) \qquad g_1'(x) = -3\cosh x^2 < 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato a, mentre il punto $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato a.

<u>Lato b: $x = 1\,,\ 0 \leq y \leq 1$.</u> Otteniamo

$$f(1,y) = -\int_0^1 3\cosh t^2\,dt + \int_0^y 2\sinh t^2\,dt =: g_2(y)\,, \qquad g_2'(y) = 2\sinh y^2 \geq 0\,.$$

Pertanto il punto $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato b, mentre il punto $(1,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato b.

<u>Lato c: $0 \leq x \leq 1\,,\ y = 1$.</u> Otteniamo

$$f(x,1) = -\int_0^x 3\cosh t^2\,dt + \int_0^1 2\sinh t^2\,dt =: g_3(x)\,, \qquad g_3'(x) = -3\cosh x^2 < 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato c, mentre il punto $(1,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato c.

<u>Lato d: $x = 0\,,\ 0 \leq y \leq 1$.</u> Otteniamo

$$f(0,y) = \int_0^y 2\sinh t^2\,dt =: g_4(y)\,, \qquad g_4'(y) = 2\sinh y^2 \geq 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato d, mentre il punto $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato d.

In conclusione, il punto $(1,0)$ è l'unico punto di minimo assoluto per f in Q, mentre il punto $(0,1)$ è l'unico punto di massimo assoluto per f in Q.

Esercizio 3

Determiniamo innanzitutto l'insieme delle primitive di f, che sarà dato da

$$\int \frac{\cos x}{(\sin x)\log^3(\sin x)}\,dx = \left(\int \frac{1}{t^3}\,dt\right)_{t=\log(\sin x)} = -\frac{1}{2\log^2(\sin x)} + C$$

dove abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $\log(\sin x) = t$, da cui $\frac{\cos x}{\sin x}\,dx = dt$. Imponendo ora la condizione richiesta, si ottiene

$$0 = F(\pi/6) = -\frac{1}{2\log^2(\sin\pi/6)} + C = -\frac{1}{2\log^2 2} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \frac{1}{2\log^2 2}\,,$$

da cui $F(x) = -\frac{1}{2\log^2(\sin x)} + \frac{1}{2\log^2 2}$.

Domanda 1

Poiché f e g sono funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}^+$, per garantire che l'integrale proposto esista finito, è sufficiente che, per $x \to +\infty$, $f(x)\,g(x) \sim 1/x^{4/3}$, pertanto l'unica risposta corretta è la b).

SOLUZIONI COMPITO D

Esercizio 1

I problemi di Cauchy proposti sono entrambi associati ad un'equazione differenziale che, per $x \neq 0$, si può ricondurre ad un'equazione a variabili separabili in forma normale, data da

$$y'(x) = \frac{1}{x}\,(y^2 - 9)\,.$$

Tale equazione ha come integrali singolari $y(x) \equiv \pm 3$, pertanto $y(x) \equiv -3$ rappresenta l'unica soluzione del secondo problema di Cauchy ed è definita su tutto $\mathbb{R}$.

Per $y \neq \pm 3$, separando le variabili, si ottiene:

$$\int \frac{1}{y^2-9}\,dy = \int \frac{1}{x}\,dx \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{6}\int \frac{1}{y-3}\,dy - \frac{1}{6}\int \frac{1}{y+3}\,dy = \log|x| + C$$

$$\frac{1}{6}\log\left|\frac{y(x)-3}{y(x)+3}\right| = \log|x| + C \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y(x)-3}{y(x)+3} = Kx^6\,,$$

da cui, dopo aver imposto la condizione iniziale, si ricava

$$y(x) = \frac{3 - \frac{3}{5}x^6}{1 + \frac{1}{5}x^6} = \frac{15 - 3x^6}{5 + x^6}\,.$$

Esercizio 2

Osserviamo che, grazie al Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale, la funzione f è differenziabile in $\mathbb{R}^2$, in quanto le sue derivate parziali sono continue su tutto il piano. Pertanto essa è anche continua su Q, che è un insieme compatto; quindi il Teorema di Weierstrass garantisce l'esistenza di almeno un punto di massimo ed un punto di minimo assoluto.

Studiamo innanzitutto la funzione f all'interno del quadrato Q. Si ottiene facilmente

$$\begin{cases} f_x(x,y) = -2\cosh x^2 \neq 0 \\ f_y(x,y) = -\sinh y^2 \end{cases}$$

e quindi non c'è nessun punto stazionario per f all'interno di Q. Studiamo ora f sul bordo di Q.

Lato a: $0 \leq x \leq 1\,,\ y = 0$. Otteniamo

$$f(x,0) = -\int_0^x 2\cosh t^2\,dt =: g_1(x) \qquad g_1'(x) = -2\cosh x^2 < 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato a, mentre il punto $(1,0)$ è punto di minimo per f vincolata al lato a.

Lato b: $x = 1\,,\ 0 \leq y \leq 1$. Otteniamo

$$f(1,y) = -\int_0^1 2\cosh t^2\,dt - \int_0^y \sinh t^2\,dt =: g_2(y)\,, \qquad g_2'(y) = -\sinh y^2 \leq 0\,.$$

Pertanto il punto $(1,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato b, mentre il punto $(1,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato b.

Lato c: $0 \leq x \leq 1\,,\ y = 1$. Otteniamo

$$f(x,1) = -\int_0^x 2\cosh t^2\,dt - \int_0^1 \sinh t^2\,dt =: g_3(x)\,, \qquad g_3'(x) = -2\cosh x^2 < 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,1)$ è punto di massimo per f vincolata al lato c, mentre il punto $(1,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato c.

Lato d: $x = 0\,,\ 0 \leq y \leq 1$. Otteniamo

$$f(0,y) = -\int_0^y \sinh t^2\,dt =: g_4(y)\,, \qquad g_4'(y) = -\sinh y^2 \leq 0\,.$$

Pertanto il punto $(0,0)$ è punto di massimo per f vincolata al lato d, mentre il punto $(0,1)$ è punto di minimo per f vincolata al lato d.

In conclusione, il punto $(0,0)$ è l'unico punto di massimo assoluto per f in Q, mentre il punto $(1,1)$ è l'unico punto di minimo assoluto per f in Q.

Esercizio 3
Determiniamo innanzitutto l'insieme delle primitive di f, che sarà dato da

$$\int \frac{\log(\tan^2 x)}{(\cos x)^2(\tan x)}\,dx = \left(\int \frac{t}{2}\,dt\right)_{t=\log(\tan^2 x)} = \frac{\log^2(\tan^2 x)}{4} + C$$

dove abbiamo effettuato il cambiamento di variabile $\log(\tan^2 x) = t$, da cui $\frac{2}{(\cos x)^2(\tan x)}\,dx = dt$. Imponendo ora la condizione richiesta, si ottiene

$$0 = F(\pi/3) = \frac{\log^2(\tan^2(\pi/3))}{4} + C = \frac{\log^2 3}{4} + C \qquad \Longrightarrow \qquad C = -\frac{\log^2 3}{4}\,,$$

da cui $F(x) = \frac{\log^2(\tan^2 x) - \log^2 3}{4}$.

Domanda 1
Poiché f e g sono funzioni continue e non negative su $\mathbb{R}^+$, per garantire che l'integrale proposto esista finito, è sufficiente che, per $x \to +\infty$, $f(x)\,g(x) \sim 1/x^{5/3}$, pertanto l'unica risposta corretta è la c).