SOLUZIONI

Esercizio 1

C.E. $= [0,2]$; $\quad f(x) \geq 0 \quad \forall x \in$ C.E. ; $f(0) = f(2) = 0$;

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{se } 1 < x < 2 \ ; \\ \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{se } 0 < x < 1 \ ; \end{cases}$$

C.E.$' = (0,1) \cup (1,2)$; $\quad f'(x) > 0 \quad \forall x \in (0,1)$; $\quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in (1,2)$;

$\lim_{x \to 1^\pm} f'(x) = \mp 1$; $\quad x = 1$ è punto angoloso e di massimo assoluto per $f(x)$;

$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x \to 2^-} f'(x) = -\infty$;

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{1-x}{(2x-x^2)^{3/2}} & \text{se } 1 < x < 2 \ ; \\ -\frac{1-x}{(2x-x^2)^{3/2}} & \text{se } 0 < x < 1 \ ; \end{cases} \qquad f''(x) < 0 \quad \forall x \in (0,1) \cup (1,2) \ .$$

Esercizio 2

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2^{2^n}}} \left[n \ln \left(\frac{n+3}{n} \right)^2 \right] &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2^n/n}} \left[2n \ln \left(1 + \frac{3}{n} \right) \right] \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2^n/n}} \left[2n \frac{3}{n} \right] = 6 \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{2^n/n}} = 0^+ \end{aligned}$$

poiché $2^n/n \to +\infty$ e, pertanto, $\frac{1}{2^{2^n/n}} \to 0^+$.

Esercizio 3

Utilizzando la definizione di derivata parziale rispetto ad x, si ottiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{|x|} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \ ; \\ -1 & \text{se } x < 0 \ ; \end{cases}$$

pertanto tale derivata non esiste. Al contrario, poiché la funzione assegnata, rispetto alla variabile y, è di classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, la derivata parziale rispetto ad y nell'origine esiste ed è fornita dalla formula

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \mathrm{e}^{|x| + \arctan y} \frac{1}{1+y^2} \bigg|_{(0,0)} = 1 \ .$$

Esercizio 4

Osserviamo che, effettuando la sostituzione di variabile $t = \frac{1}{x}$ (da cui $dx = -\frac{1}{t^2}\ dt$) l'integrale proposto diviene

$$\int_1^2 \frac{1}{x^3} \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\ dx = -\int_1^{1/2} \frac{t^3}{t^2} \arctan t\ dt = \int_{1/2}^1 t \arctan t\ dt =$$

$$\frac{1}{2} t^2 \arctan t \Big|_{1/2}^1 - \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \frac{t^2}{1+t^2}\ dt = \frac{1}{2}\left[t^2 \arctan t - t + \arctan t\right] \Big|_{1/2}^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4} - \frac{5}{8} \arctan \frac{1}{2}\ ,$$

dove si è utilizzato il teorema di integrazione per parti.