

1. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{\frac{n^4+1}{n^3+5}}.$$

2. Determinare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(x) = (x \cos x)y^2(x), \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

3. Calcolare

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2(e^{x^2+y^2} - 1)}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \cos 2x + \sqrt{3}x.$$

Determinare massimo e minimo assoluti di f nell'intervallo $[0, \pi]$.

5. Si consideri, al variare del parametro reale α , il seguente integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{|x - \alpha|^{3/2}} dx.$$

1. Stabilire se tale integrale esiste finito per $\alpha = -1$.
2. Stabilire se tale integrale esiste finito per $\alpha = 0$.
3. Stabilire se tale integrale esiste finito per $\alpha > 0$.

6. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua assegnata e si consideri la funzione integrale

$$F(x) = \int_0^x t^3 f(t) dt.$$

Fornire una condizione sufficiente sulla funzione f , affinché F sia strettamente decrescente.

Tempo:
3 ore

